Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

# Để học tốt TOÁN 8

## TẬP 2

**Ta có :**

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \geq 2^m \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.




NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

# ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 8

## TẬP 2

- *Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.*
- *Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

# GIỚI THIỆU CHUNG

*Xin trân trọng giới thiệu tới các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:*

## RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS

*do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.*

*Bộ tài liệu gồm 9 cuốn :*

**Cuốn 1:** Toán 6 – Tập 1
**Cuốn 2:** Toán 6 – Tập 2
**Cuốn 3:** Toán 7 – Tập 1
**Cuốn 4:** Toán 7 – Tập 2
**Cuốn 5:** Toán 8 – Tập 1
**Cuốn 6:** Toán 8 – Tập 2
**Cuốn 7:** Toán 9 – Tập 1
**Cuốn 8:** Toán 9 – Tập 2

*Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.*

*Mục tiêu của bộ sách:*

1. *Cung cấp cho các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*

2. *Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

*Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:*

***Phần I - Đại số***
***Phần II - Hình học***

*Mỗi phần chứa đựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa đựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.*

*Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:*

**I.** ***Kiến thức cơ bản***

*Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh họa ngay sau đó.*

**II.** ***Các ví dụ minh họa***

*Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.*

**III.** ***Câu hỏi ôn tập lý thuyết***

**IV.** ***Bài tập đề nghị***

**V.** ***Hướng dẫn - Đáp số***

*Như vậy, ở mỗi chủ đề:*

1. *Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cũng như thí dụ minh họa ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng "**Lấy học trò làm trung tâm** "*

2. *Tiếp đó, tới các ví dụ minh hoạ có chọn lọc, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*

3. *Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " **Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ?** ".*

4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

*Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.*

*Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.*

# MỤC LỤC

# Phần 1

## Đại số

# CHƯƠNG I - PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chương này, bao gồm:

1. **Mở đầu về phương trình**
2. **Phương trình bậc nhất một ẩn**
3. **Phương trình chứa ẩn ở mẫu**
4. **Phương trình tích**
5. **Phương trình có hệ số chữ (phương trình chứa tham số)**
6. **Giải bài toán bằng cách lập phương trình**



# MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

**Thí du 1:** Ta gọi các hệ thức:

- $2x + 3 = x - 2$ là một phương trình với ẩn số x.
- $3y - 2 = y$ là một phương trình với ẩn số y.

...

từ đó ta có được định nghĩa về phương trình một ẩn:

> *Một phương trình với ẩn x có dạng: $A(x) = B(x)$*
> *trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.*

**Chú ý:**
1. Hệ thức $x = m$ (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.
2. Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

**Thí du 2:** Ta nhận thấy:

1. Phương trình: $x - 3 = 5$ có một nghiệm $x = 8$.
2. Phương trình: $(x - 1)(x + 2) = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -2$.
3. Phương trình: $x(x - 2) = x^2 - 2x$ có vô số nghiệm.
4. Phương trình: $x^2 + 8 = 0$ vô nghiệm.

### 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

> Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường được kí hiệu bởi S.

**Thí du 3:** Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

a. $x + 3 = 5$.     b. $|x| = 1$.

*Giải*

a. Ta có: $x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 3 = 2$.
   Vậy, ta được $S = \{2\}$.

b. Ta có: $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
   Vậy, ta được $S = \{1, -1\}$.

Khi bài toán yêu cầu *giải một phương trình*, ta phải tìm *tất cả các nghiệm* (hay *tìm tập nghiệm*) của phương trình đó.

**Thí du 4:** Giải phương trình: $x^2 - 4 = 5$.

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi phương trình như sau:

$x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 3$ hoặc $x = -3$.

**Chú ý**: Qua lời giải trên ta nhận thấy phương trình : $x^2 = a$, với $a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$.

*Cách 2*: Biến đổi phương trình như sau: $x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 3$ hoặc $x = -3$.

**Chú ý:** Qua lời giải trên ta nhận thấy phương trình :

$$A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } B = 0 \left( \text{hoặc biết } \left[ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right. \right)$$

## 3. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

*Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương.*

**Thí du 5:** Hai phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

$x - 2 = 0$, (1)

$x + 1 = 3$. (2)

*Giải*

Giải phương trình (1), ta được: $x = 2 \Rightarrow S_1 = \{2\}$.

Giải phương trình (2), ta được: $x = 2 \Rightarrow S_2 = \{2\}$.

Vậy, ta thấy $S_1 = S_2$ do đó hai phương trình đã cho tương đương với nhau.

**Nhận xét:** **1.** Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải từng phương trình rồi thực hiện phép so sánh hai tập nghiệm, và ở đây vì $S_1 = S_2$ chúng ta kết luận " *Hai phương trình tương đương* ".

**2.** Nếu $S_1 = S_2 = \varnothing$ thì hai phương trình cũng tương đương, do đó " *Hai phương trình vô nghiệm cũng tương đương với nhau* ".

**Thí dụ 6:** Hai phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

$x + 1 = 2$, (1)

$x^2 - 8x + 15 = 0$. (2)

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Giải phương trình (1), ta được: $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$.

Giải phương trình (2), ta được: $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 3 \Rightarrow S_2 = \{5, 3\}$

Vậy, ta thấy $S_1 \neq S_2$ do đó hai phương trình không tương đương.

*Cách 2*: Giải phương trình (1), ta được: $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$.

Thay $x = 1$ vào phương trình (2), ta được: $1^2 - 8.1 + 15 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$, mâu thuẫn tức là, $x = 1$ không phải là nghiệm của (2).

Vậy, hai phương trình không tương đương.

**Nhận xét:**

**1.** Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải phương trình (1) rồi nhận xét rằng $x = 1$ không phải là nghiệm của (2) từ đó kết luận " *Hai phương trình tương đương* ". Sở dĩ chúng ta lựa chọn hướng làm như vậy là bởi việc giải phương trình (2) là khó khăn.

**2.** Như vậy, để chứng tỏ hai phương trình không tương đương, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

*Cách 1*: Tìm tập hợp nghiệm của mỗi phương trình, rồi đưa ra nhận xét về hai tập hợp này.

*Cách 2*: Chỉ ra một giá trị của ẩn là nghiệm của phương trình này nhưng không là nghiệm của phương trình kia.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

a. $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$.

b. $\frac{1}{x - 1} = 0$.

c. $|x| = -\frac{1}{2}$.

d. $2x + 2 = 2x + 3$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$(x-2)(x+2) = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4$, luôn đúng với mọi x.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm S = **R**.

b. Nhận xét rằng: VT $\neq 0$, với mọi $x \neq 1$ do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm $S = \varnothing$.

c. Nhận xét rằng: VT = $|x| \geq 0$, với mọi x,

$VP = -\frac{1}{2}$, luôn âm, do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm $S = \varnothing$.

d. Nhận xét rằng: $VT = 2x + 2 < 2x + 3 = VP$, do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm $S = \varnothing$.

**Nhận xét:** Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy:

1. ở câu a), bằng việc ***đánh giá*** được VT = VP với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = **R** ". Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp cho dù có được VT = VP nhưng lại không thể kết luận được như vậy, thí dụ:

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Ta cũng có: $VT = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = VP$

và trong trường hợp này ta lại kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = **R**\{− 1, 1} "Các em học sinh hãy thử lí giải vì sao ?

2. ở câu b), bằng việc ***đánh giá*** được VT $\neq 0$ với mọi $x \neq 1$, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* $S = \varnothing$ ".

3. ở câu c), bằng việc ***đánh giá*** được VT $\geq 0$ và VP $< 0$ với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* $S = \varnothing$ ".

4. ở câu d), bằng việc ***đánh giá*** được VT < VP với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận "*Phương trình có tập hợp nghiệm* $S = \varnothing$".

Cả 4 câu a), b), c), d) đã cho chúng ta làm quen được với việc " *Sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình* ".

**Ví dụ 2:** Tìm tập nghiệm của phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = x + 1$.

*Giải*

Nhận xét rằng:

- Với x = 0 thì VT = 0 còn VP = 8, do đó x = 0 không là nghiệm.
- Với x < 0 thì $\sqrt{x}$ không xác định.
- Với x > 0 thì $\sqrt{-x}$ không xác định.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm $S = \varnothing$.

**Nhận xét:** Lời giải của ví dụ trên được trình bày theo kiểu *loại dần*. Tuy nhiên, các em học sinh hẳn sẽ thắc mắc "*Tại sao lại biết cách thực hiện như vậy?*". Câu trả lời được lấy ra từ thuật toán chung khi thực hiện công việc giải phương trình, bao gồm các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

*Bước 2:* Giải phương trình.

Và ở đây, khi thực hiện bước 1, ta cần có điều kiện:

$$x \geq 0 \text{ và } -x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó việc giải phương trình trong bước 2 chỉ cần thử với x = 0.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng phương trình $x + |x| = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \leq 0$.

*Giải*

Nhận xét rằng, với $x \leq 0$ ta luôn có: $|x| = -x$ do đó: $x + |x| = x - x = 0$.

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \leq 0$.

**Ví dụ 4:** Chứng tỏ rằng phương trình $mx - 3 = 2m - x - 1$ luôn nhận x = 2 làm nghiệm, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

*Giải*

Với x = 2, ta được: $VT = m.2 - 3 = 2m - 3$,

$VP = 2m - 2 - 1 = 2m - 3$,

suy ra: VT = VP.

Vậy, phương trình luôn nhận x = 2 làm nghiệm, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

**Ví dụ 5:** Cho phương trình: $(m^2 - 3m + 2)x^2 = m - 1$, với m là tham số.

Chứng minh rằng:

a. Với m = 1, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Với m = 2, phương trình vô nghiệm.

c. Với m = 0, phương trình vô nghiệm.

d. Với m = 3, phương trình nhận x = 1 và x = –1 làm nghiệm.

*Giải*

a. Với m = 1, phương trình có dạng: $(1^2 - 3.1 + 2)x^2 = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$

do đó, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Với m = 2, phương trình có dạng: $(2^2 - 3.2 + 2)x^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow 0x = 1$

do đó, phương trình vô nghiệm.

c. Với m = 0, phương trình có dạng: $(0^2 - 3.0 + 2)x^2 = 0 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = -1$

Nhận xét rằng: $VT \geq 0$

$VP = -1 < 0$

nên phương trình vô nghiệm.

d. Với m = 3, phương trình có dạng:

$(3^2 - 3.3 + 2)x^2 = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

do đó, phương trình nhận x = 1 và x = –1 làm nghiệm.

**Ví dụ 6:** Cho hai phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$, (1)

$2x^2 - 5x + 3 = 0$. (2)

a. Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung x = 1.

b. Chứng minh rằng x = 2 là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. Chứng minh rằng $x = \frac{3}{2}$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).

d. Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không ? Vì sao ?

*Giải*

a. Với x = 1, ta được: $1^2 - 3.1 + 2 = 0$, do đó x = 1 là nghiệm của (1).

$2.1^2 - 5.1 + 3 = 0$, do đó x = 1 là nghiệm của (2).

Vậy, hai phương trình có nghiệm chung x = 1.

b. Với x = 2, ta được: $2^2 - 3.2 + 2 = 0$, do đó x = 2 là nghiệm của (1).

$2.2^2 - 5.2 + 3 = 1$, do đó x = 2 không là nghiệm của (2).

Vậy, x = 2 là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. *Thực hiện tương tự câu b).*

d. Ta có ngay kết luận hai phương trình không tương đương vì "$x = 2$ *là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2)*".

**Ví dụ 7:** Chứng tỏ rằng cặp phương trình sau là tương đương:

$$\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = 0, \qquad (1)$$

$$2x - 3 = 0. \qquad (2)$$

*Giải*

Nghiệm của phương trình (1) là các giá trị của x thoả mãn

$$\begin{cases} 4x^2 - 9 = 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3)(2x - 3) = 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$$

đó chính là phương trình (2).

Vậy, hai phương trình đã cho tương đương.

**Ví dụ 8:** Cặp phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

$$\frac{x^2}{x} = 1, \qquad (1)$$

$$x^2 = x. \qquad (2)$$

*Giải*

Nhận xét rằng $x = 0$ là nghiệm của phương trình (2) nhưng không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy, hai phương trình đã cho không tương đương.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu định nghĩa phương trình ẩn x.

**Câu hỏi 2:** Nêu định nghĩa tập nghiệm của phương trình.

**Câu hỏi 3:** Thế nào là việc giải một phương trình.

**Câu hỏi 4:** Cho ví dụ phương trình có một nghiệm, có hai nghiệm, có vô số nghiệm, vô nghiệm.

**Câu hỏi 5:** Định nghĩa hai phương trình tương đương.

**Câu hỏi 6:** Cho ví dụ về hai phương trình tương đương và hai phương trình không tương đương.

**Câu hỏi 7:** Hai phương trình vô nghiệm có tương đương với nhau không? Vì sao ?

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho phương trình: $x^2 - 4 = 0$.

Cho biết các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. 2 là nghiệm của phương trình.

b. $\{2\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình.

**Bài tập 2.** Cho phương trình: $x^2 = 2x$.

a. 0 là nghiệm của phương trình.

b. $\{0\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình.

**Bài tập 3.** Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x - 1 = 2$.

b. $x(x - 4) = 0$.

c. $x^2 = 16$.

d. $2(x - 3) = 2x - 6$.

e. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$.

f. $|x| = -x$.

**Bài tập 4.** Tìm tập nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x} + \sqrt{-x} = 1$.

**Bài tập 5.** Chứng minh rằng phương trình $x - |x| = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

**Bài tập 6.** Chứng tỏ rằng phương trình $2mx - 1 = 2m + x - 2$ luôn nhận $x = 1$ làm nghiệm, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

**Bài tập 7.** Cho phương trình: $(m^2 - 5m + 6)x^2 = m - 2$, với m là tham số.

Chứng minh rằng:

a. Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Với $m = 3$, phương trình vô nghiệm.

c. Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.

d. Với $m = 4$, phương trình nhận $x = 1$ và $x = -1$ làm nghiệm.

**Bài tập 8.** Cho hai phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0$, (1)

$3x^2 - 5x + 2 = 0$. (2)

a. Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$.

b. Chứng minh rằng $x = 3$ là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. Chứng minh rằng $x = \dfrac{2}{3}$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).

d. Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không ? Vì sao ?

**Bài tập 9.** Các cặp phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $x - 2 = 2$ và $2x - 1 = 7$.

b. $x + 1 = 0$ và $x^2 - 1 = 0$.

d. $2x + 3 = 0$ và $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

d. $|x| = 2$ và $x^2 = 4$.

e. $2x^2 + 1 = 0$ và $x^2 + 1 = 0$.

**Bài tập 10.** Hãy tìm giá trị của hằng số a biết rằng x = 1 là một nghiệm của phương trình: $(3x - a)(x + 1) - (x + 2)^2 = 1$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. "*2 là nghiệm của phương trình* "là câu trả lời đúng, bởi khi thay 2 vào phương trình ta được: $2^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 - 0$, luôn đúng.

b. "*{2} là tập hợp nghiệm của phương trình* " là câu trả lời đúng, bởi ngoài 2 ra phương trình còn có nghiệm x = −2.

Nếu với yêu cầu " *Sửa lạicho đúng* "thì ta viết "*{2, − 2} là tập hợp nghiệm của phương trình* ".

**Bài tập 2.** *Học sinh tự làm* – Tham khảo bài tập 1.

**Bài tập 3.**

a. $x = \frac{3}{2}$.

b. x = 0, x = 4.

c. $x = \pm 4$.

d. Mọi x.

e. Mọi $x \neq 1$.

f. Mọi $x \leq 0$.

**Bài tập 4.** $S = \varnothing$.

**Bài tập 5.** Nhận xét rằng, với $x \geq 0$ ta luôn có: $|x| = x$ do đó: $x - |x| = x - x = 0$.

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

**Bài tập 6.** *Tham khảo ví dụ 4.*

**Bài tập 7.** *Tham khảo ví dụ 5.*

**Bài tập 8.** *Tham khảo ví dụ 6.*

**Bài tập 9.**

a. Nhận thấy rằng:

- Phương trình x − 2 = 2 có tập nghiệm $S_1 = \{4\}$.
- Phương trình 2x − 1 = 7 có tập nghiệm $S_2 = \{4\}$.

Vậy, hai phương trình tương đương.

b. Nhận thấy rằng:

- x = 1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$.
- x = 1 không là nghiệm của phương trình x + 1 = 0.

Vậy, hai phương trình không tương đương.

c. Nhận thấy rằng phương trình :

$4x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$

đó chính là phương trình còn lại. Vậy, hai phương trình tương đương.

d. Nhận thấy rằng phương trình : $|x| = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$

đó chính là phương trình còn lại.

Vậy, hai phương trình tương đương.

e. Nhận thấy rằng:

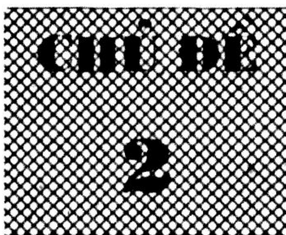
- Phương trình $2x^2 + 1 = 0$ có tập nghiệm $S_1 = \{\varnothing\}$.
- Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có tập nghiệm $S_2 = \{\varnothing\}$.

Vậy, hai phương trình tương đương.

**Bài tập 10.** Vì x = 1 là nghiệm của phương trình nên:

$(3.1 - a)(1 + 1) - (1 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(3 - a) - 3^2 = 1 \Leftrightarrow 6 - 2a - 9 = 1 \Leftrightarrow a = -2.$

Vậy, với a = −2 thoả mãn điều kiện đầu bài.




# PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH

Với các đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$a + b = c \Leftrightarrow a + b - c = 0$ → *chuyển vế và đổi dấu*

$2a + 4b = -2 \Leftrightarrow 1 + 2b = -1$ → *chia cả hai vế cho 2*

và với các phương trình chúng ta cũng có được những quy tắc như vậy, cụ thể:

> 1. ***(Quy tắc chuyển vế)***: *Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.*
> 2. ***(Quy tắc nhân với một số)***: *Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.*

**Thí dụ 1:** Sử dụng hai quy tắc biến đổi phương trình để giải các phương trình sau:

a. $x^2 + x = x^2$. b. $2x = 1$. c. $3x = x + 8$.

*Giải*

a. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$x^2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

b. Sử dụng quy tắc chia với một số, biến đổi phương trình về dạng: $x = \frac{1}{2}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

c. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi phương trình về dạng:

$$3x - x = 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

**Nhận xét**: Trong lời giải các phương trình trên, chúng ta đã thừa nhận rằng kết quả " *Từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho* ".

## 2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

***Định nghĩa**: Phương trình:*

$$ax + b = 0, \text{ với } a \text{ và } b \text{ là hai số đã cho và } a \neq 0,$$

*được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.*

**Thí dụ 2:** Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$.   b. $mx + (m - 1)y + 2 = 0$.

*Giải*

a. Để phương trình: $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$

là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -1$ phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để phương trình: $mx + (m - 1)y + 2 = 0$

là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

*Trường hợp 2*: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với m = 1 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với m = 0 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn y.

*Phương trình bậc nhất một ẩn được giải như sau:*

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

*Vậy, phương trình bậc nhất ax + b = 0 luôn có nghiệm duy nhất* $x = -\frac{b}{a}$.

**Thí dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a. 5x − 3 = 0. b. 6 − 2x = 0.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{5}$.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $-2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a. 7x + 21 = 0. b. 8 − 6x = 0.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $7x = -21 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = −3.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $-6x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

**Ví dụ 2:** Cho phương trình: $(m^2 - 1)x + 1 = m$.

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. m = 1. b. m = −1. c. m = 0.

*Giải*

a. Với m = 1, phương trình có dạng: $0.x + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, luôn đúng với mọi x.

Vậy, với m = 1 phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

b. Với m = −1, phương trình có dạng: $0.x + 1 = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$, mâu thuẫn.

Vậy, với m = −1 phương trình vô nghiệm.

c. Với m = 0, phương trình có dạng: $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, với m = 0 phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu hai quy tắc biến đổi phương trình.

**Câu hỏi 2:** Định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn và cho ví dụ.

**Câu hỏi 3:** Nếu phương pháp giải phương trình bậc nhất một ẩn.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 3 = 0$.

b. $(m - 1)x + (m^2 - 1)y + 4 = 0$.

**Bài tập 2.** Giải các phương trình sau:

a. $3x - 4 = 0$.

b. $2x + 13 = 0$.

c. $3 - 7x = 0$.

d. $1 + 5x = 0$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình sau:

a. $2x + 16 = 0$.

b. $4x + 18 = 0$.

c. $9 - 6x = 0$.

d. $-16 - 8x = 0$.

**Bài tập 4.** Cho phương trình: $(m^2 - 4)x - 2 = m$.

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. m = 2.

b. m = −2.

c. m = 1.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với m = – 2 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

*Trường hợp 2*: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với m = –1 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

**Bài tập 2.**

a. $x = \frac{4}{3}$.

b. $x = -\frac{13}{2}$.

c. $x = \frac{3}{7}$.

d. $x = -\frac{1}{5}$.

**Bài tập 3.**

a. x = – 8.

b. $x = -\frac{9}{2}$.

c. $x = \frac{3}{2}$.

d. x = –2.

**Bài tập 4.**

a. Với m = 2, phương trình có dạng: 0.x – 2 = 2 ⇔ 0 = 4, mâu thuẫn.

Vậy, với m = 2 phương trình vô nghiệm.

b. Với m = –2, phương trình có dạng: 0.x – 2 = –2 ⇔ –2 = –2, luôn đúng.

Vậy, với m = 1 phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

c. Với m = 1, phương trình có dạng: (1 – 4)x – 2 = 1 ⇔ –3x = 3 ⇔ x = –1.

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm duy nhất x = –1.




# PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$

## I. PHƯƠNG PHÁP

Với những phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$ thông qua các phép biến đổi đại số thông thường, thí dụ: $2x - 4 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 3 + 4 \Leftrightarrow x = 7$.

phương pháp giải được minh hoạ bởi các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** Giải phương trình: $4(x - 1) - (x + 2) = -x$.

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$4x - 4 - x - 2 = -x$ → *Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc*

$\Leftrightarrow 4x - x + x = 2 + 4$ → *Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.*

$\Leftrightarrow 3x = 6$ → *Thu gọn, ta nhận được phương trình dạng $ax = -b$*

$\Leftrightarrow x = 2$ → *Sử dụng quy tắc chia để nhận được nghiệm của phương trình.*

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

**Thí dụ 2:** Giải phương trình: $\dfrac{5x + 2}{6} - x = 1 - \dfrac{x + 2}{3}$.

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$\dfrac{5x + 2 - 6x}{6} = \dfrac{6 - 2(x + 2)}{6}$ → *Quy đồng mẫu số hai vế.*

$\Leftrightarrow 2 - x = 6 - 2x - 4$ → *Nhân hai vế với 6 để khử mẫu.*

$\Leftrightarrow -x + 2x = 6 - 4 - 2$ → *Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.*

$\Leftrightarrow x = 0$. → *Thu gọn.*

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

**Nhận xét:**

1. Như vậy để giải những phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$, ta thực hiện theo các bước:

   *Bước 1:* Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu ... để biến đổi phương trình ban đầu về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$.

   *Bước 2:* Giải phương trình nhận được, từ đó kết luận.

2. Tuy nhiên, trong một số trường hợp chúng ta cần linh

hoạt để nhận được những cách biến đổi đơn giản hơn, thí dụ:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{6}=0 \Leftrightarrow (x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=0$$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

**3.** Quá trình biến đổi phương trình có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x, thí dụ:

- Phương trình:

  $2x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 2x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0 = -2$

  $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

- Phương trình:

  $x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x - x = 2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 0$

  $\Rightarrow$ Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình: $\frac{5x-1}{10}+\frac{2x+3}{6}=\frac{x-8}{15}-\frac{x}{30}$.

*Giải*

Phương trình tương đương với: $3(5x-1)+5(2x+3)=2(x-8)-x$

$\Leftrightarrow 15x - 3 + 10x + 15 = 2x - 16 - x \Leftrightarrow 15x + 10x - 2x + x = -16 + 3 - 15$

$\Leftrightarrow 24x = -28 \Leftrightarrow x = -\frac{28}{24} = -\frac{7}{6}$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{7}{6}$.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{4}=\frac{x-2}{5}+\frac{x-2}{6}$.

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng: $\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-2}{5}-\frac{x-2}{6}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

**Nhận xét:** Trong lời giải trên, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung x – 2, điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình: $(3x-4)(2x+1)-(6x+5)(x-3)=3.$ (1)

*Giải*

Để tránh phải ghi lại nhiều lần, ta đi biến đổi riêng VT:

$VT = 6x^2 + 3x - 8x - 4 - 6x^2 + 18x - 5x + 15 = 8x + 11.$

Khi đó, phương trình (1) có dạng: $8x + 11 = 3 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -1$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình bày các bước để giải phương trình đưa được về dạng $ax + b$ hoặc $ax = -b$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a. $4x + 1 = 6x - 13$.

b. $5 - 3x = 6x + 7$.

c. $15 - 8x = 9 - 5x$.

d. $9 - 2x = x + 1$.

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a. $2(x - 2) + 3 = 1 - 2(x + 1)$.

b. $2(x - 3) + 1 = 2(x + 1) - 9$.

c. $3(x + 1)(x - 1) - 5 = 3x^2 + 2$.

d. $x^3 + 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1) = x^3 + x - 4 - (x - 7)$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a. $2x - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4} - \frac{1-2x}{8}$.

b. $\frac{x+4}{3} - 2x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{x+2}{3}$.

c. $\frac{2x+0,3}{2} - \frac{2x-1,5}{3} = \frac{2x-2,5}{12}$.

d. $\frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} = \frac{x-3}{15} + \frac{x-3}{16}$.

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a. $-\frac{x-1}{12} + \frac{x+3}{6} = 8 + \frac{2x+1}{15}$.

b. $x + \frac{x-1}{3} = 2 - \frac{2x+1}{2} + \frac{x+2}{5}$.

c. $\frac{3x+2}{12} - \frac{x}{4} = \frac{x+5}{6} - \frac{2x-3}{3}$.

d. $\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4}(x-3) = 1 - \frac{1}{6}(3x+2)$.

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a. $\frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$.

b. $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{14}$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $x = 7$.

b. $x = -\frac{2}{9}$.

c. $x = 2$.

d. $x = \frac{8}{3}$.

**Bài tập 2.**

a. Nhận mọi x làm nghiệm

b. Vô nghiệm.

c. Nhận mọi x làm nghiệm.

d. $x = 1$.

**Bài tập 3.**

a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{2}(4x-1)=\frac{1}{8}(6x+1) \Leftrightarrow 4(4x-1)=6x+1 \Leftrightarrow 10x=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(-5x+7)=\frac{1}{6}(x-4) \Leftrightarrow -10x+14=x-4 \Leftrightarrow 11x=18 \Leftrightarrow x=\frac{18}{11}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{18}{11}$.

c. $x=-\frac{103}{20}$.

d. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x-3)\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=3$.

**Bài tập 4.**

a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{12}(7+x)=\frac{1}{15}(121+2x) \Leftrightarrow 3x=-449 \Leftrightarrow x=-\frac{449}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=-\frac{449}{3}$.

b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(4x-1)=\frac{1}{10}(19-8x) \Leftrightarrow 64x=67 \Leftrightarrow x=\frac{67}{64}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{67}{64}$.

c. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}(3x-11) \Leftrightarrow 10x=3 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{10}{3}$.

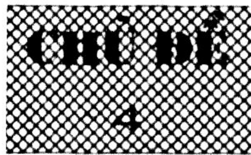
d. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{5}{4}(x-1)=\frac{1}{6}(4-3x) \Leftrightarrow 21x=23 \Leftrightarrow x=\frac{23}{21}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{23}{21}$.

**Bài tập 5.**

a. $x=9$. b. $x=-\frac{419}{14}$.




# PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta sử dụng kết quả:

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{array}\right.$$

***Mở rộng***: Với phương trình:

$$A(x).B(x) \ldots M(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ \ldots \\ M(x) = 0 \end{array}\right.$$

Lấy các nghiệm của các phương trình trên, ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

**Thí dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a. $(x - 1)(3 - 2x) = 0$.

b. $(5x - 3)(4x + 1)(x - 8)(x + 3) = 0$.

*Giải*

a. Phương trình tương đương với: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3 - 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$.

b. Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 3 = 0 \\ 4x + 1 = 0 \\ x - 8 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{5} \\ x = -\frac{1}{4} \\ x = 8 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm $x = \frac{3}{5}$, $x = -\frac{1}{4}$, $x = 8$, $x = -3$.

**Chú ý:** Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là một phương trình tích, khi đó chúng ta cần sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi phương trình về dạng tích.

**...u 2:** Giải các phương trình sau:

a. $2x(x+1) = x^2 - 1$. b. $3x^3 = x^2 + 3x - 1$.

*...iải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi phương trình về dạng: $2x(x+1) = (x-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x(x+1) - (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

*Cách 2*: Biến đổi phương trình về dạng: $2x^2 + 2x - x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(3x - 1) - (3x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = \pm 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm phân biệt là $x = -1$, $x = 1$, $x = \dfrac{1}{3}$.

**Nhận xét**: Như vậy, để giải những phương trình đưa được về dạng tích, ta thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Bằng việc xác định nhân tử chung (hoặc chuyển tất cả các hạng tử sang vế trái, lúc này vế phải bằng 0) ta đưa phương trình ban đầu về dạng tích.

*Bước 2.* Giải phương trình rồi kết luận.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình: $2x(x^2 + 2) = (x - 3)(x^2 + 2)$. (1)

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi phương trình về dạng: $2x(x^2 + 2) - (x - 3)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(2x - x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

*Cách 2*: Biến đổi phương trình về dạng: $2x^3 + 4x = x^3 + 2x - 3x^2 - 6$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x - x^3 - 2x + 3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) + (2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

*Cách 3*: Vì $x^2 + 2 > 0$ nên chia cả hai vế của phương trình (1) cho

$x^2 + 2 > 0$, ta được: $2x = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = -3 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

**Nhận xét**: Như vậy, để giải phương trình đã cho chúng ta đã chỉ ra được ba cách trình bày, cụ thể:

*Cách 1:* Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách đặt nhân tử chung.

*Cách 2:* Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách chuyển vế.

*Cách 3:* Sử dụng quy tắc chia cả hai vế của phương trình cho một số khác 0.

Và ở đó:

1. Cách 2 là quá cồng kềnh do việc chúng ta đã không đánh giá được sự có mặt của nhân tử chung ban đầu là $x^2 + 2$.
2. Cách 3 cho lời giải đơn giản hơn, tuy nhiên nếu " *chia cả hai vế của phương trình cho một số chưa khẳng định được đã khác 0* " sẽ dẫn tới hiện tượng mất nghiệm của phương trình. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $3x(2x - 3) = 7(2x - 3)$. (1)

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$3x(2x - 3) - 7(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(3x - 7) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0 \\ 3x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{3} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{7}{3}$.

**Nhận xét:** 1. Nếu chia cả hai vế của phương trình (1) cho (2x – 3) thì ta sẽ bị mất một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

2. Có thể giải ví dụ trên bằng cách xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x \neq \frac{3}{2}$ thì $2x - 3 \neq 0$.

Chia cả hai vế của (1) cho $2x - 3 \neq 0$ được:

$$3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}, \text{ thoả mãn } x \neq \frac{3}{2}.$$

*Trường hợp 2*: Nếu $x = \frac{3}{2}$ thì (1) được nghiệm đúng.

Kết luận $S = \left\{\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

---

**Ví dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a. $(x^3 + x^2) + (x^2 + x) = 0$.

b. $x^3 + 1 - (x + 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$.

*Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2(x + 1) + x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1$, $x = 0$.

*Cách 2*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 + x^2 + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1$, $x = 0$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1$, $x = 2$.

*Cách 2*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 + 1 - (x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) - (x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1$, $x = 2$.

**Nhận xét**: Trong lời giải trên, việc trình bày hai cách giải nhằm mục đích giúp các em học sinh có được phép so sánh, từ đó lựa chọn cho mình phương pháp thích hợp.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

*Giải*

Trước tiên ta đi phân tích đa thức $x^2 - 2x - 3$ thành nhân tử, để thực hiện công việc này ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

*Cách 1*: (*Sử dụng phép tách theo B*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + \underbrace{x - 3x}_{\text{tách } -2x = x - 3x} - 3 = (x^2 + x) - (3x + 3)$$

$$= x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3).$$

*Cách 2*: (*Sử dụng phép tách theo A*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = \underbrace{3x^2 - 2x^2}_{\text{tách } x^2 = 3x^2 - 2x^2} - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x)$$

$$= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3).$$

*Cách 3*: (*Sử dụng phép tách theo C*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x \underbrace{-2 - 1}_{\text{tách } -3 = -2 - 1} = (x^2 - 1) - (2x + 2)$$

$$= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2)$$

$$= (x + 1)(x - 3).$$

*Cách 4*: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2.x.1 + \underbrace{1 - 4}_{\text{tách } -3 = 1 - 4} = (x - 1)^2 - 4$$

$$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = 3$, $x = -1$.

**Nhân xét:** Bốn cách phân tích đa thức dạng $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử trong lời giải trên đã được trình bày rất chi tiết trong cuốn Toán 8 tập 1 - *Đề nghị các em học sinh ôn lại.*

**Ví dụ 5:** Cho phương trình: $(x + 1 - 3m)(3x - 5 + 2m) = 0$.

a. Tìm các giá trị của m sao cho một trong các nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b. Với mỗi m vừa tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

*Giải*

a. Để phương trình nhận $x = 1$ làm một nghiệm điều kiện là:

$(1 + 1 - 3m)(3.1 - 5 + 2m) = 0$

$\Leftrightarrow (2 - 3m)(-2 + 2m) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-3m=0 \\ -2+2m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=1 \end{array}\right.$.

Vậy, với $m = \frac{2}{3}$ hoặc $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $m = \frac{2}{3}$, phương trình có dạng: $(x + 1 - 3.\frac{2}{3})(3x - 5 + 2.\frac{2}{3}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x-\frac{11}{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 3x-\frac{11}{3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{11}{9} \end{array}\right.$.

Vậy, với $m = \frac{2}{3}$ phương trình có các nghiệm $x = 1$, $x = \frac{11}{9}$.

- Với $m = 1$, phương trình có dạng: $(x + 1 - 3.1)(3x - 5 + 2.1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có các nghiệm $x = 2$, $x = 1$.

**Ví dụ 6:** Cho phương trình: $2x^3 + ax + 3 = 0$. (1)

a. Biết rằng $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (1), hãy xác định a.

b. Với a vừa tìm được ở câu a) hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

*Giải*

a. Vì $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (1) nên ta được:

$2(-1)^3 + a(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy, với $a = 1$ phương trình (1) có một nghiệm là $x = -1$.

b. Với $a = 1$, phương trình (1) có dạng: $2x^3 + x + 3 = 0.$ (2)

Để giải phương trình (2) ta cần phân tích đa thức $2x^3 + x + 3$ thành nhân tử, để thực hiện công việc này chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Thực hiện phép phân tích:

$2x^3 + x + 3 = 2x^3 + 2 + x + 1 = 2(x^3 + 1) + (x + 1)$

$= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1)$

$= (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 + 1) = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3).$

*Cách 2*: Vì $x = -1$ là nghiệm của phương trình nên đa thức $2x^3 + x + 3$ sẽ chia hết cho $x + 1$ (thực hiện phép chia đa thức $2x^3 + x + 3$ cho $x + 1$ ra nháp), từ đó ta được: $2x^3 + x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3).$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x + 1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 2x + 3 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1), ta được $x = -1$.

Giải (2), ta có nhận xét: $2x^2 - 2x + 3 = 2(x^2 - x + 1) + 1 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

**<u>Nhận xét</u>**: Trong lời giải trên, việc việc phân tích đa thức $2x^2 + x + 3$ thành nhân tử được trình bày hai cách, ở đó:

*Cách 1*: Việc thực hiện là tương đối tự phát, nó được dựa trên kinh nghiệm trong việc phân tích đa thức thành nhân tử.

*Cách 2*: Chúng ta đã tận dụng được giả thiết cho $x = -1$ là nghiệm của phương trình. Ta có kết quả tổng quát sau:

"*Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = a$ thì đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$*"

Tức là, khi đó: $f(x) = (x - a).g(x)$

và phương trình trở thành : $(x - a)g(x) = 0$.

**Ví dụ 7:** Giải phương trình: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$. Biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

*Giải*

Thực hiện phép chia đa thức $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ cho $x - 1$, ta được:

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(2x^2 + 3x - 2) = (x - 1)(2x^2 + 4x - x - 2)$

$= (x - 1)[2x(x + 2) - (x + 2)] = (x - 1)(2x - 1)(x + 2)$.

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 1)(x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{1}{2}$.

**Nhận xét:** Như vậy với việc cho thêm giả thiết " *Phương trình có một nghiệm là x = 1* " đã giảm bớt được đáng kể độ khó của bài toán trong bước phân tích đa thức thành nhân tử. Điều này được hiểu là:

1. Với các em học sinh trung bình, bài toán được cho dưới dạng:

   " *Giải phương trình $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 1$* ".

2. Với các em học sinh khá, bài toán được cho dưới dạng:

   " *Giải phương trình $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$* ".

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình bày các bước để giải phương trình đwa được về dạng tích.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a. $(2x - 6)(3 + 4x) = 0$.

b. $(4x - 5)(5x + 6)(6x - 7) = 0$.

c. $(x - 3)(2x + 1)(2x - 3)(4x + 3) = 0$.

d. $(3x - 2)(2x + 5)(8x - 3)(4x + 1)(3x - 1) = 0$.

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a. $(x - 6)(x + 1) = 2(x + 1)$.

b. $(x - 2)(5x + 3) = (3x - 8)(x - 2)$.

c. $2x(15x + 25) - 33(3x + 5) = 0$.

d. $(2x^2 + 1)(2x + 5) = (2x^2 + 1)(x - 1)$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a. $x^2 - 9x + 20 = 0$.

b. $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$.

c. $x^2 + 2x - 15 = 0$.

d. $(x^2 - 1)^2 = 4x + 1$.

**Bài tập 4.** Giải phương trình: $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$. Biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

**Bài tập 5.** Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

Biết rằng phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

**Bài tập 6.** Cho phương trình: $(2x + 3m)(3x - 2m - 1) = 0$.

a. Tìm các giá trị của m sao cho một trong các nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b. Với mỗi m vừa tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

**Bài tập 7.** Cho biểu thức hai biến: $f(x, y) = (x - 3y + 4)(2x + 3y - 1)$.

a. Tìm các giá trị của y sao cho phương trình (ẩn x) $f(x, y) = 0$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

b. Tìm các giá trị của x sao cho phương trình (ẩn y) $f(x, y) = 0$ nhận $y = 1$ làm nghiệm.

**Bài tập 8.** Cho phương trình: $x^3 + ax^2 + 11x - 6 = 0$.

a. Biết rằng $x = 1$ là một nghiệm của phương trình, hãy xác định a.

b. Với a vừa tìm được ở câu a) hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

**Bài tập 9.** * Giải các phương trình:

a. $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$.

b. $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$.

c. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

d. $2x^3 - 9x + 2 = 0$.

e. $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0$.

f. $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $x = 3, x = -\frac{3}{4}$.

b. $x = \frac{5}{4}, x = -\frac{6}{5}, x = \frac{7}{6}$.

c. $x = 3, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{4}$.

d. $x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}, x = \frac{3}{8}, x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$.

**Bài tập 2.**

a. $x = 8, x = -1$.

b. $x = 2, x = -\frac{11}{2}$.

c. $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{33}{10}$.  d. $x = -6$.

**Bài tập 3.**

a. Biến đổi: $x^2 - 9x + 20 = x^2 - 4x - 5x + 20 = x(x-4) - 5(x-4) = (x-4)(x-5)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 4$, $x = 5$.

b. Biến đổi: $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5) = x[(x-2)^2 + 1]$.

Khi đó, phương trình có dạng: $x[(x-2)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

c. Biến đổi: $x^2 + 2x - 15 = x^2 + 5x - 3x - 15 = x(x+5) - 3(x+5) = (x+5)(x-3)$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x+5)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = -5$, $x = 3$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$(x^2 - 1)^2 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x + 2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x[x(x^2 - 4) + 2(x-2)] = 0 \Leftrightarrow x[x(x-2)(x+2) + 2(x-2)] = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$, $x = 2$.

**Bài tập 4.** Thực hiện phép chia đa thức $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ cho $x - 1$, ta được:

$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = (x-1)(4x^2 - 5x + 1) = (x-1)(4x^2 - 4x - x + 1)$

$= (x-1)[4x(x-1) - (x-1)] = (x-1)(x-1)(4x-1)$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-1)(x-1)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 4x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = \frac{1}{4}$.

**Bài tập 5.** Thực hiện phép chia đa thức $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$ cho $x - 1$, rồi tiếp tục chia thương cho $x + 2$, ta được:

$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x - 1)(x + 2)(x^2 - 5x + 6)$

$= (x - 1)(x + 2)(x^2 - 3x - 2x + 6) = (x - 1)(x + 2)[x(x - 3) - .2(x - 3)]$

$= (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x - 3)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = \pm 2$, $x = 3$.

**Bài tập 6.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 7.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 8.**

a. Vì $x = 1$ là một nghiệm của phương trình nên ta được:

$1^3 + a.1^2 + 11.1 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$

Vậy, với $a = -1$ phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

b. Với $a = -1$, phương trình có dạng: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình nên đa thức $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sẽ chia hết cho $x - 1$ (thực hiện phép chia đa thức $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ cho $x - 1$ ra nháp), từ đó ta được: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

**Bài tập 9.**

a. Phân tích: $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = (3x - 2)(x^2 - 2x - 2)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(3x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x - 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Giải (1), ta được $x = \frac{2}{3}$.
- Giải (2), ta biến đổi: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{3} \\ x - 1 = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

b. Phân tích: $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$.

*Tới đây đề nghị các em học sinh giải tiếp.*

...

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

c. $x = -1$, $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$.

d. $x = 2$, $x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

e. $x = -\frac{1}{2}$.




# PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải phương trình: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x$.

Ta sẽ trình bày theo hai cách để chỉ ra điều cần chú ý:

1. Với cách giải: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

2. Với cách giải: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x$

$\Leftrightarrow x + 1 = x \Leftrightarrow 1 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

**Nhận xét**:

1. Lời giải thứ nhất, dễ thấy sai bởi khi $x = 1$ thì $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ không xác định, do đó $x = 1$ không thể là nghiệm của phương trình.
2. Lời giải thứ hai, cho kết quả đúng xong cách trình bày như vậy là còn thiết sót.

Do đó, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là *điều kiện xác định của phương trình*.

Tiếp theo, với việc giải phương trình: $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$.

nếu các em học sinh bắt tay ngay vào việc biến đổi nó về dạng tích, tức là:

$$x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

rồi vội vàng kết luận " *Phương trình có hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$* " thì các em đã mắc phải một sai lầm dễ nhận thấy rằng " *$x = 0$ không thể là nghiệm của phương trình* ".

Do đó, thêm một lần nhắc nhở là " *Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần chú ý đến một yếu tố đặc biệt, đó là điều kiện xác định của phương trình* ".

## 2. TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Đối với các phương trình dạng: $\frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} + \ldots + \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0$

điều kiện xác định của phương trình được cho bởi hệ: $\begin{cases} B_1(x) \neq 0 \\ B_2(x) \neq 0 \\ \ldots \\ B_n(x) \neq 0 \end{cases}$.

**Thí dụ 1:** Tìm điều kiện xác định cho mỗi phương trình sau:

a. $\frac{x - 1}{x - 2} = 3$.  b. $\frac{x}{x + 1} = \frac{x - 6}{x - 4}$.

*Giải*

a. Điều kiện xác định của phương trình là: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

b. Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

**Chú ý:** Trong những trường hợp hệ điều kiện phức tạp, chúng ta nên giải từng điều kiện một để giảm độ phức tạp, thí dụ sau sẽ minh hoạ trường hợp này.

**Thí dụ 2:** Tìm điều kiện xác định cho phương trình sau:

$$\frac{2x^2}{x^2 - 1} + \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 4} = 2.$$

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta được: $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.
- Giải (2): $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 4(x - 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$

Vậy, điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$

## 3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của phương trình.

*Bước 2:* Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

*Bước 3:* Giải phương trình vừa nhận được.

*Bước 4:* Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là nhiệm của phương trình đã cho.

**Thí dụ 3:** Giải phương trình: $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

Biến đổi phương trình về dạng: $\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow x(x+1) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \text{ loại vì không thoả mãn điều kiện} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình có một nghiệm x = 0.

**Chú ý:** Tuy nhiên, trong những trường hợp việc tìm ra được điều kiện một cách cụ thể là rất khó khăn, chúng ta sẽ lựa chọn theo hướng:

*Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của phương trình (và không giải).

*Bước 2:* Giải phương trình.

*Bước 3:* Thử lại.

*Bước 4:* Kết luận về nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 4:** Giải phương trình: $\dfrac{x^2-1}{x^6-5x+4} = 0.$

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x^6 - 5x + 4 \neq 0.$ (*)

Phương trình tương đương với: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Kiểm tra điều kiện:

- Với x = 1, ta có: $1^6 - 5.1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$, không thoả mãn điều kiện (*).

- Với $x = -1$, ta có: $1^6 - 5.(-1) + 4 = 1 + 5 + 4 = 10 \neq 0$, thoả mãn (*)

Vậy, phương trình có một nghiệm x = điều 1.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải phương trình : $\dfrac{x-5}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} = 1$.

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\dfrac{(x-5)(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) + 2(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 + 2x - 2 = x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow -8x + 2x + 4x = 3 - 15 + 2 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$, thoả mãn điều kiện .

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = 5$.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $\dfrac{x+5}{x^2-5x} - \dfrac{x-5}{2x^2+10x} = \dfrac{x+25}{2x^2-50}$.

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng: $\dfrac{x+5}{x(x-5)} - \dfrac{x-5}{2x(x+5)} = \dfrac{x+25}{2(x^2-25)}$.

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x(x-5) \neq 0 \\ 2x(x+5) \neq 0 \\ 2(x^2-25) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 5 \end{cases}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $2(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = x(x + 25)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x + 50 - x^2 + 10x - 25 = x^2 + 25x$

$\Leftrightarrow 5x = -25 \Leftrightarrow x = -5$, không thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình: $\dfrac{x-8}{x-7} = \dfrac{1}{7-x} + 8$.

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 7 \neq 0 \\ 7 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 7$.

Tới đây để thực hiện tiếp chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu:

$$\frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + \frac{8(x-7)}{x-7}$$

$\Leftrightarrow x - 8 = -1 + 8(x - 7) \Leftrightarrow x - 8 = -1 + 8x - 56$

$\Leftrightarrow x - 8x = -1 - 56 + 8 \Leftrightarrow -7x = -49 \Leftrightarrow x = 7$, không thoả mãn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

*Cách 2*: Thực hiện phép quy đồng cục bộ:

$$\frac{x-8}{x-7} = \frac{1}{7-x} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} + \frac{1}{x-7} = 8 \Leftrightarrow \frac{x-8+1}{x-7} = 8$$

$\Leftrightarrow 1 = 8$, mâu thuẫn. Vậy, phương trình vô nghiệm.

**Nhận xét**: Cách 2 trong lời giải trên được trình bày để minh hoạ bước đầu cho hiệu quả của phép quy đồng cục bộ.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình: $x^2 + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2}$.

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 3x + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-1-3}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-4}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \text{ loại vì không thoả mãn điều kiện} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = 1$.

**Nhận xét**:

1. Trong lời giải trên, chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ để từ đó nhận được phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$, và việc đưa phương trình này về dạng tích tương đối đơn giản.
2. Trong trường hợp chúng ta không sử dụng phương pháp quy đồng cục bộ thì sẽ nhận được:

$$x^2(x-2) + 2x - 1 = 3x(x-2) + 3$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 6x + 3$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

Dễ thấy, việc chuyển đổi phương trình này về dạng tích khó khăn hơn nhiều so với phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phương trình sau có nghiệm $x = 1$ là đúng hay sai ?

$$x + \frac{2x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} + 1.$$

**Câu hỏi 2:** Nêu điều kiện xác định đối với phương trình dạng:

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} + \ldots + \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0.$$

**Câu hỏi 3:** Nêu các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các phương trình:

a. $x + \dfrac{2x-1}{1-x} = -1.$ b. $x + \dfrac{1}{x} = 2.$

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a. $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-3}.$

b. $\dfrac{2x-4}{x-1} - \dfrac{x-3}{x-2} = 1.$

c. $\dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x^2-2}{1-x^2} = 0.$

d. $\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{3}{x-2} = 2.$

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a. $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ b. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{6}{x-1} + \dfrac{8}{(x+2)(x-1)} = 0$

c. $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$ d. $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-3}{4-x^2}.$

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a. $\dfrac{1}{x^2+2x+1} - \dfrac{3}{x^2-2x+1} = \dfrac{2}{1-x^2}.$

b. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{x-1}{x^2-x+1} = \dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}.$

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a. $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{(x-1)(x-3)}.$ b. $\dfrac{2x-1}{x-1} + \dfrac{x}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{6x-2}{x-2}.$

c. $x + \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x+3}{x^2+5x+6} + \dfrac{x+4}{x^2+6x+8} = 1.$

**Bài tập 6.** Cho phương trình: $\dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+1} = 2.$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Giải phương trình với m = 1.

c. Giải phương trình với m = –2.

d. Tìm m để phương trình nhận x = 2 làm nghiệm.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $x = 0, x = 2.$ b. $x = 1.$

**Bài tập 2.**

a. $x = 4.$ b. $x = 3.$ c. $x = -8.$ d. $x = \frac{5}{4}.$

**Bài tập 3.**

a. $x = 0.$ b. $x = -1.$ c. $x = -3.$ d. $x = -\frac{3}{5}.$

**Bài tập 4.**

a. $x = -\frac{1}{2}.$ b. $x = \frac{3}{2}.$

**Bài tập 5.**

a. $x = 0.$ b. $x = 0.$ c. $x = 0.$

**Bài tập 6.** Điều kiện có nghĩa cho phương trình là $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - m)(x + 1) + (x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)x = 4 - m. \qquad (1)$$

a. Với m = 2, phương trình (1) có dạng: $4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy, với m = 2 phương trình nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm.

b. Với m = 1, phương trình (1) có dạng: $3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, với m = 1 phương trình nhận x = 1 làm nghiệm.

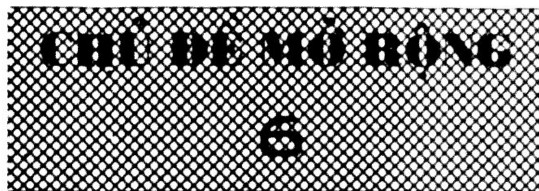
c. Với m = −2, phương trình (1) có dạng: $0x = 6$, mâu thuẫn.

Vậy, với m = −2 phương trình vô nghiệm.

d. Để phương trình nhận x = 2 làm nghiệm điều kiện là:

$2(m + 2) = 4 - m \Leftrightarrow 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy, với m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.



# PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ CHỮ

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải phương trình: $ax - 8 = 0 \Leftrightarrow ax = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{8}{a}$

**Nhận xét:** Ta thấy ngay:

1. Với $a = 1$ thì lời giải trên là đúng.
2. Với $a = 0$ thì $\frac{8}{a}$ không xác định do đó lời giải trên là sai.

Như vậy, khi giải phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp bằng 0 và khác 0 của hệ số của x, đó được gọi là " *Giải và biện luận phương trình theo tham số* ". Để tiện theo dõi, trước khi trình bày bài toán tổng quát chúng ta đi giải và biện luận lại phương trình $ax - 8 = 0$ như sau:

Biến đổi phương trình về dạng: $ax = 8$ (*)

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $a = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow 0x = 8$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $a \neq 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$, phương trình có nghiệm duy nhất.

### 2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**Bài toán:** Giải và biện luận phương trình : $ax + b = 0$.

**PHƯƠNG PHÁP CHUNG**

Viết lại phương trình dưới dạng: $ax = -b$ (1)

Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $a = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0$.

Vậy, ta được:

- Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $a \neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, tức là phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

**Thí dụ 1:** Giải và biện luận phương trình: $m^2x + 6 = 4x + 3m$.

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^2 - 4)x = 3m - 6$. (1)

*Trường hợp 1*: Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Với $m = 2$, ta được: (1) $\Leftrightarrow 0.x = 0$.

  Vậy, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

- Với $m = -2$, ta được: (1) $\Leftrightarrow 0x = -12$.

  Vậy, phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq -2$

(1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}$.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m+2}$.
- Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

**Nhận xét:** Trong thí dụ trên, ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh hoạ trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số $a \neq 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.
- Hệ số $a = 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho b.

**Thí dụ 2:** Giải và biện luận phương trình: $m^2x + 1 = m - x$.

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^2 + 1)x = m - 1$. (1)

Ta có : $m^2 + 1 \neq 0$, với mọi m.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m-1}{m^2+1}$.

Vậy, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m-1}{m^2+1}$.

**Thí dụ 3:** Giải và biện luận phương trình: $m(x + 3) = m(x + 4) + 6$.

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$mx + 3m = mx + 4m + 6$

$\Leftrightarrow mx - mx = 4m - 3m + 6 \Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Kết luận:

- Với $m = -6$, phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $m \neq -6$, phương trình vô nghiệm.

**Chú ý:** Trong trường hợp bài toán có nhiều tham số chúng ta cần khéo léo biện luận theo các tham số đó để vét cạn được các trường hợp.

**Thí dụ 4:** Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x+a}{b-a} + \dfrac{x-a}{b+a} = \dfrac{2}{a^2-b^2}$ (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} b - a \neq 0 \\ b + a \neq 0 \\ a^2 - b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm b.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$-(a + b)(x + a) + (a - b)(x - a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1$.

Khi đó: • Với $b = 0$, phương trình vô nghiệm.

• Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{a^2+1}{b}$.

Kết luận: – Với $b = 0$ hoặc $a = \pm b$, phương trình vô nghiệm.

– Với $b \neq 0$ hoặc $a \neq \pm b$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{a^2+1}{b}$.

**Chú ý**: Thông thường, khi thực hiện bài toán trên các em học sinh hay mắc phải lỗi ngộ nhận rằng kết luận là:

- Với $b = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

Hãy nhớ rằng, việc kết luận cần phải được kết hợp với điều kiện có nghĩa của phương trình.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận phương trình: $\frac{2x+a}{a-2} - \frac{a-2x}{a+2} = \frac{6a}{a^2-4}$ (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a+2 \neq 0 \\ a^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2.$

Viết lại phương trình dưới dạng: $(2x + a)(a + 2) - (a - 2x)(a - 2) = 6a$

$\Leftrightarrow 2ax + 4x + a^2 + 2a - a^2 + 2a + 2ax - 4x = 6a$

$\Leftrightarrow 4ax + 4a = 6a \Leftrightarrow 4ax = 2a.$ (2)

*Trường hợp 1*: Nếu $a \neq 0$

(2) $\Leftrightarrow x = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$.

*Trường hợp 2*: Nếu $a = 0$.

(2) $\Leftrightarrow 0.x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Kết luận:
- Với $a \neq 0$ và $a \neq \pm 2$, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.
- Với $a = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = \pm 2$, phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 2:** Giải và biện luận phương trình: $a^2x = a(x + b) - b$. (1)

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng: $a(a - 1)x = b(a - 1)$. (2)

*Trường hợp 1*: Nếu $a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

Với $a = 0$, ta được: (2) $\Leftrightarrow 0x = -b$.

- Với $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Với a = 1, ta được: (2) $\Leftrightarrow$ 0x = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

*Trường hợp 2*: Nếu $a(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận: – Với a = b = 0 hoặc a = 1, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

– Với a = 0 và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

– Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{b}{a}$.

**Ví dụ 3:** Giải và biện luận phương trình:

$$(m-2)x^2 - (2m-1)x + m + 1 = 0. \quad (1)$$

*Giải.*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[(m-2)x - m - 1](x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (m-2)x = m+1 \quad (2) \end{array}\right.$$

Ta đi giải và biện luận (2).

*Trường hợp 1*: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

(2) $\Leftrightarrow$ 0x = 3 mâu thuẫn $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$.

Kết luận: – Với m = 2, phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

– Với $m \neq 2$, phương trình có 2 nghiệm x = 1 và $x = \frac{m+1}{m-2}$.

**Nhận xét**: Bằng việc biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích ta đã biện luận được một phương trình bậc 2, tuy nhiên sau này ta có được một phương pháp tổng quát hơn để giải và biện luận một phương trình bậc hai bất kỳ.

**Ví dụ 4:** Giải và biện luận phương trình: $\frac{mx - m - 3}{x+1} = 1$. (1)

*Giải.*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Biến đổi (1) về dạng: $(m-1)x = m + 4$. (2)

*Trường hợp 1*: Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

(2) $\Leftrightarrow$ 0 = 5 mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m-1}$.

Kiểm tra điều kiện: $x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Kết luận: – Với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$, phương trình vô nghiệm.

– Với $m \neq 1$ hoặc $m \neq -\frac{3}{2}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$.

**Ví dụ 5:** Giải và biện luận phương trình: $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$. (1)

*Giải.*

Điều kiện : $\begin{cases} ax - 1 \neq 0 \\ bx - 1 \neq 0 \\ (a+b)x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases}$. (I)

Viết lại phương trình dưới dạng: $abx[(a + b)x - 2] = 0$. (2)

*Trường hợp 1*: Nếu $a = b = 0$.

Điều kiện (I) luôn đúng, khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in R$.

*Trường hợp 2*: Nếu: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{b}$, khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.

*Trường hợp 3*: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$, khi đó:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \neq \frac{1}{a}$.

*Trường hợp 4*: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -a \neq 0$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow x = 0$, là nghiệm duy nhất của phương trình.

*Trường hợp 5*: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a+b}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{a+b} \end{array}\right.$.

- Nghiệm $x = \frac{2}{a+b}$ chỉ thoả mãn điều kiện khi $a \neq b$.

Kết luận:

- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{a}$.
- Với $b = \pm a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Với $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0, a \neq b$, phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{2}{a+b}$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình: $ax = 0$.

**Câu hỏi 2:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình: $ax = 4$.

**Câu hỏi 3:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình: $ax + b = 0$.

**Câu hỏi 4:** Nêu lược đồ giải và biện luận phương trình: $\frac{ax+b}{cx+d} = e$, với $c \neq 0$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $m^2(x + 1) = x + m$.

b. $(m + 1)^2x - m = (2m + 5)x + 2$.

**Bài tập 2.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{a} = 0$.

b. $\frac{x-a}{a+2} + \frac{x-1}{a-2} = 0$.

**Bài tập 3.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $\frac{x}{a-1} - \frac{2}{a+1} = \frac{4x}{a^2-1}$.

b. $\frac{ax-1}{a+1} - \frac{x+a}{1-a} = \frac{a^2+1}{a^2-1}$.

**Bài tập 4.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $\frac{x+a}{b} = \frac{x}{a} + \frac{a}{b}$.    b. $\frac{x+a}{b} = 2 + \frac{x-b}{a}$.

**Bài tập 5.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$.

b. $a(x - b) - 1 = b(1 - 2x)$.    c. $\frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2-b^2}$.

**Bài tập 6.** Giải và biện luận các phương trình:

a. $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$.    b. $\frac{a}{x-a} + \frac{1}{x+1} = \frac{a-1}{x-a} + \frac{a+1}{x+1}$.

**Bài tập 7.** Xác định m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất

a. $\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}$.    b. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x-m}$.

**Bài tập 8.** Xác định m để các phương trình sau có tập hợp nghiệm là **R**

a. $m(m^2x - 1) = 1 - x$.    b. $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$.

**Bài tập 9.** Xác định m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $(m - 1)x = 4x + m + 1$.

b. $m^2(x - 1) = 2(mx - 2)$.    c. $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 5.** c. Điều kiện $a \neq \pm b$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a + b)(x + a) + (a - b)(x - a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1$$

- Với b = 0, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

**Bài tập 7.** b. Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq m$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $mx = 2 - m$.    (2)

Do đó (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-m}{m} \neq 1 \\ \frac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Vậy với $m \notin \{-2, 0, 1\}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

**Bài tập 8.**

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^3 + 1)x = m + 1$. (2)

Do đó (1) có tập hợp nghiệm là R $\Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy với m = –1 phương trình (1) có tập hợp nghiệm là **R**.

**Bài tập 9.**

a. Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m + 2)x = 4 - m$. (2)

b. Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

$(2) \Leftrightarrow 0x = 6$ (MT) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c. Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \dfrac{4-m}{m+2}$.

Do đó (1) vô nghiệm: $\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \dfrac{4-m}{m+2} = 1 \\ \dfrac{4-m}{m+2} = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy với m = –2 hoặc m = 1 phương trình (1) vô nghiệm.

***Nhận xét***: Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $m + 2)x = 4 - m$. (2)

Phương trình (1) vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} m + 2 = 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \dfrac{4-m}{m+2} = 1 \vee \dfrac{4-m}{m+2} = -1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \end{array} \right.$$

Tuy nhiên cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy nếu bài toán yêu cầu "*Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)* "tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.



# GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Lập phương trình:

1. Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
2. Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
3. Lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng.

*Bước 2:* Giải phương trình.

*Bước 3:* Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

**Thí dụ 1:** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số ban đầu.

*Giải*

Gọi x là tử số của phân số phải tìm, điều kiện x là số nguyên. Vì:

- Phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11 nên mẫu số bằng x + 11, suy ra phân số có dạng: $\frac{x}{x+11}$.
- Khi tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$ nên: $\frac{x+3}{(x+11)-4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+7} = \frac{3}{4} \overset{x \neq -7}{\Leftrightarrow} 4(x+3) = 3(x+7)$

  $\Leftrightarrow 4x - 3x = 21 - 12 \Leftrightarrow x = 9$, thoả mãn điều kiện.

  Vậy, phân số cần tìm bằng $\frac{9}{20}$.

**Nhận xét:**

1. Bài toán trên yêu cầu tìm ra phân số, xong thực chất là đi tìm tử số (hoặc mẫu số) của phân số đó, do đó chúng ta thiết lập ẩn số x cho tử số.
2. Nếu bài toán yêu cầu tìm hai hay nhiều giá trị thì chúng ta cần lựa chọn ẩn để gán cho *giá trị thuận lợi nhất* (tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng có vai trò như nhau).

**Thí dụ 2:** (*Bài toán cổ*): Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó, biết:

*Vừa gà vừa chó*
*Bó lại cho tròn*
*Ba mươi sáu con*
*Một trăm chân chẵn.*

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Ta lần lượt thực hiện:

Gọi x là số gà, điều kiện x là số nguyên dương nhỏ hơn 36. Vì:

- Tổng số gà và chó là " *Ba mươi sáu con* " nên số chó bằng $36 - x$.
- Tổng số chân của gà và của chó là " *Một trăm chân chẵn* " nên:

$2x + 4(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 2x + 144 - 4x = 100$

$\Leftrightarrow -2x = 100 - 144 \Leftrightarrow x = 22$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số gà bằng 22 con và số chó bằng $36 - 22 = 14$ con.

*Cách 2*: Ta lần lượt thực hiện:

Gọi x là số chó, điều kiện x là số nguyên dương nhỏ hơn 36. Vì:

- Tổng số gà và chó là " *Ba mươi sáu con* " nên số gà bằng $36 - x$.
- Tổng số chân của gà và của chó là " *Một trăm chân chẵn* " nên:

$4x + 2(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 4x + 72 - 2x = 100$

$\Leftrightarrow 2x = 100 - 72 \Leftrightarrow x = 14$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số chó bằng 14 con và số gà bằng $36 - 14 = 22$ con.

**Nhận xét**: Trong hai cách giải của bài toán trên, chúng ta đã tuân thủ đủ 3 bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập phương trình, cụ thể:

1. Bài toán yêu cầu tìm số gà và số chó, do vậy có thể lựa chọn số gà hoặc số chó là ẩn:
   - Trong cách 1 ta chọn x là số gà và thiết lập điều kiện $x \in N^*$ và $x < 36$.
   - Tiếp đó, ta diễn đạt đại lượng chưa biết là số chó bằng $36 - x$.
   - Cuối cùng, ta thiết lập được phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng (là x và $36 - x$) thông qua giả thiết tổng số chân bằng 100.
2. Giải phương trình nhận được trong bước 1, ta được $x = 22$.
3. Vì giá trị $x = 22$ thoả mãn điều kiện được thiết lập trong bước 1, từ đó ta suy ra số chó và kết luận nghiệm cho bài toán.

**Thí dụ 3:** Hiệu hai số bằng 8, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

*Giải*

Gọi x là số thứ nhất trong hai số đã cho.

Vì:

- Số thứ hai gấp đôi lần số thứ nhất nên nó bằng 2x.
- Hiệu hai số bằng 8 nên: $x - 2x = 8$ (1)

  hoặc $2x - x = 8$. (2)

Giải (1), ta được $x = -8$, khi đó số còn lại bằng $-16$.

Giải (2), ta được $x = 8$, khi đó số còn lại bằng 16.

Vậy, có hai cặp số thoả mãn điều kiện đầu bài là $-8$ và $-16$ hoặc 8 và 16.

**Nhận xét:** Thí dụ trên cho thấy, có thể có 1 hoặc nhiều phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng - *Điều này nhắc nhở các em học sinh cần có được cái nhìn tổng quan để chỉ ra được đầy đủ các trường hợp.*

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Tổng hai số bằng 72, hiệu của chúng bằng 6. Tìm hai số đó.

*Giải*

Gọi x là số lớn trong hai số đã cho, điều kiện $6 \le x \le 72$. Vì:

- Tổng hai số bằng 72 nên số nhỏ bằng $72 - x$.
- Hiệu hai số bằng 6 nên: $x - (72 - x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 72 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 + 72$

  $\Leftrightarrow 2x = 78 \Leftrightarrow x = 39$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số lớn bằng 39 và số nhỏ bằng $72 - 39 = 33$.

**Chú ý:** Trong lời giải bài toán trên, nếu chúng ta không phân biệt số lớn và số nhỏ thì cần phải lập hai phương trình dạng:

$$x - (72 - x) = 6 \text{ hoặc } (72 - x) - x = 6.$$

**Ví dụ 2:** Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5. Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68. Tìm số đó.

*Giải*

Gọi x là chữ số hàng chục của số phải tìm, điều kiện x là số nguyên và $0 < x \le 9$. Vì:

- Số cần tìm là số lẻ và chia hết cho 5 nên chữ số hàng đơn vị của nó phải bằng 5, suy ra số cần tìm có dạng: $\overline{x5} = 10x + 5$.
- Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 nên:

$(10x + 5) - x = 68 \Leftrightarrow 9x = 63 \Leftrightarrow x = 7$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm bằng 75.

**Ví dụ 3:** (*Bài toán cổ Hi Lạp*):

- Thưa Py-ta-go lỗi lạc, trường của người có bao nhiêu môn đệ ?

  Nhà hiền triết trả lời:

- Hiện nay, một nửa đang học Toán, một phần tư đang học nhạc, một phần bảy ngồi yên suy nghĩ. Ngoài ra còn có ba phụ nữ.

  Hỏi trường Đại học của Py – ta – go có bao nhiêu người ?

*Giải*

Gọi x là số người trong trường Đại học của Py – ta – go, điều kiện $x \in N^*$. Vì:

- Một nửa đang học Toán, tức là có $\frac{x}{2}$.
- Một phần tư đang học Nhạc, tức là có $\frac{x}{4}$.
- Một phần bảy ngồi yên suy nghĩ, tức là có $\frac{x}{7}$.
- Tổng số những người học Toán, Nhạc, ngồi yên suy nghĩ và ba phụ nữ bằng số môn đệ của trường nên:

  $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x \Leftrightarrow 14x + 7x + 4x + 3.28 = 28x$

  $\Leftrightarrow 25x + 84 = 28x \Leftrightarrow 3x = 84 \Leftrightarrow x = 28$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, trường Đại học của Py – ta – go có 28 người.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho phân số $\frac{23}{201}$. Tìm một số sao cho nếu lấy tử cộng với số đó, lấy mẫu trừ đi số đó thì phân số mới có giá trị bằng $\frac{3}{5}$.

**Bài tập 2.** Tổng hai số bằng 90, hiệu của chúng bằng 72. Tìm hai số đó.

**Bài tập 3.** Tổng hai số bằng 33, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

**Bài tập 4.** Hiệu hai số bằng 9, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

**Bài tập 5.** Hiệu hai số bằng 4, tỉ số giữa chúng bằng $\frac{3}{2}$. Tìm hai số đó.

**Bài tập 6.** Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{2}{3}$. Tìm phân số ban đầu.

**Bài tập 7.** Có hai ngăn sách, trong đó số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II. Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì số sách ở ngăn II bằng $\frac{5}{7}$ số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

**Bài tập 8.** Ba khối học sinh 6, 7, 8 đi tham quan. Số học sinh khối 6 bằng $\frac{2}{5}$ tổng số. Số học sinh khối 7 bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh khối 6. Số học sinh khối 8 là 135 người. Tính tổng số học sinh đi tham quan.

**Bài tập 9.** Mẹ 37 tuổi, con 7 tuổi. Sau mấy năm nữa thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con ?

**Bài tập 10.** Tìm một số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó thì số ấy tăng thêm 1219 đơn vị.

**Bài tập 11.** Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh. Biết rằng 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi, 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi và tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21 học sinh. Tính số học sinh của mỗi lớp.

**Bài tập 12.** Hai người cùng khởi hành một lúc từ A để đến B, đường dài 60km. Vận tốc người thứ nhất là 12km/h, vận tốc người thứ hai là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B ?

**Bài tập 13.** Một người đi từ A để đến B, vận tốc 30km/h. Lúc từ B về A, người đó đi với vận tốc 40km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 45 phút. Tính quãng đường AB.

**Bài tập 14.** Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10km. Để đi từ A đến B, một ca nô đi hết 3 giờ 20 phút, một ô tô đi hết 2 giờ. Biết vận tốc của ca nô kém vận tốc của ô tô là 17km/h, tính vận tốc của canô.

**Bài tập 15.** Một ca nô tuần tra đi xuôi từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

**Bài tập 16.** Hai người cùng đi một lúc từ A để đến B, đường dài 120km. Người thứ nhất đi với vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Người thứ hai đi trên nửa đầu của quãng đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của người thứ nhất là 10km/h, đi trên nửa sau của quãng đường với vận tốc kém vận tốc người thứ nhất là 6km/h. Biết rằng hai người đến B cùng một lúc, tính vận tốc của người thứ nhất.

**Bài tập 17.** Người ta pha 3 kg nước nóng ở nhiệt độ $90^0C$ với 2 kg nước lạnh ở nhiệt độ $20^0$. Hỏi nhiệt độ nước sau khi pha là bao nhiêu ?

**Bài tập 18.** Cho 200 gam dung dịch có nồng độ muối là 10%. Phải pha thêm vào dung dịch đó bao nhiêu gam nước để dung dịch lúc sau có nồng độ muối là 8% ?

**Bài tập 19.** 200g dung dịch chứa 50g muối. Cần pha thêm bao nhiêu gam nước để được một dung dịch chứa 10% muối ?

**Bài tập 20.** Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính số dân mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** Gọi x là số cần tìm.

Khi đó, ta có: $\frac{23 + x}{201 - x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(23 + x) = 3(201 - x) \Leftrightarrow 8x = 488 \Leftrightarrow x = 61$.

Vậy, số cần tìm bằng 81.

**Bài tập 2.** Gọi số lớn là x. Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 90, suy ra số nhỏ là $90 - x$.
- Hiệu của chúng bằng 72, suy ra:

  $x - (90 - x) = 72 \Leftrightarrow x - 90 + x = 72 \Leftrightarrow 2x = 162 \Leftrightarrow x = 81$.

Vậy, hai số cần tìm là 81 và 9.

**Bài tập 3.** Gọi số lớn là x. Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 33, suy ra số nhỏ là $33 - x$.
- Số này gấp đôi số kia, suy ra: $x = 2(33 - x) \Leftrightarrow x = 66 - 2x \Leftrightarrow 3x = 66 \Leftrightarrow x = 22$.

Vậy, hai số cần tìm là 22 và 11.

**Bài tập 4.** Gọi số lớn là x. Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 9, suy ra số nhỏ là $x - 9$.
- Số này gấp đôi số kia, suy ra: $x = 2(x - 9) \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18$.

Vậy, hai số cần tìm là 18 và 9.

**Bài tập 5.** Gọi số lớn là x. Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 4, suy ra số nhỏ là $x - 4$.
- Tỉ số giữa chúng bằng $\frac{3}{2}$, suy ra: $\frac{x}{x - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 3(x - 4)$

  $\Leftrightarrow 2x = 3x - 12 \Leftrightarrow x = 12$.

Vậy, hai số cần tìm là 12 và 8.

**Bài tập 6.** Gọi tử số là x. Từ giả thiết:

- Tử số bé hơn mẫu số là 11, suy ra mẫu số là x + 11.

  Và khi đó phân số có dạng $\frac{x}{x+11}$

- Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{2}{3}$, suy ra: $\frac{x+3}{(x+11)-5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(x+3) = 2(x+6)$

  $\Leftrightarrow 3x + 9 = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy, phân số cần tìm là $\frac{3}{14}$.

**Bài tập 7.** Gọi số sách trong ngăn thứ II là x. Từ giả thiết:

- Số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II, suy ra nó có 3x cuốn.
- Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì

  Số sách ở ngăn I còn 3x − 20 cuốn

  Số sách ở ngăn II là x + 20 cuốn

Khi đó, ta có: $x + 20 = \frac{5}{7}(3x - 20) \Leftrightarrow 7x + 140 = 15x - 100 \Leftrightarrow 8x = 240 \Leftrightarrow x = 30$.

Vậy, số sách ở ngăn thứ I bằng 90 cuốn và số sách ở ngăn thứ II bằng 30 cuốn.

**Bài tập 8.** Gọi x là tổng số học sinh đi tham quan. Từ giả thiết:

- Số học sinh khối 6 bằng $\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$.
- Số học sinh khối 7 bằng $\frac{3}{4}.\frac{2x}{5} = \frac{3x}{10}$.

Khi đó, ta có: $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} + 135 = x \Leftrightarrow 4x + 3x + 1350 = 10x$

$\Leftrightarrow 3x = 1350 \Leftrightarrow x = 450$ người.

Vậy, tổng số học sinh đi tham quan là 450 người.

**Bài tập 9.** Gọi x là số năm cần thiết. Sau x năm thì:

- Tuổi của mẹ bằng 37 + x.
- Tuổi của con bằng 7 + x.

Khi đó, ta có: $37 + x = 3(7 + x) \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy, sau 8 năm thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con.

**Bài tập 10.** Gọi x là số cần tìm. Từ giả thiết:

- Khi viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó, ta được số mới có giá trị bằng 10x + 4.

Khi đó, ta có: $10x + 4 = x + 1219 \Leftrightarrow 9x = 1215 \Leftrightarrow x = 135$.

Vậy, số cần tìm là 135.

**Bài tập 11.** Gọi x là số học sinh lớp 8A. Từ giả thiết:

- Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh, suy ra lớp 8B có 94 – x học sinh.
- 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi bằng $\frac{25x}{100} = \frac{x}{4}$ học sinh.
- 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi bằng $\frac{20(94-x)}{100} = \frac{94-x}{5}$ học sinh.

Khi đó, ta có: $\frac{x}{4} + \frac{94-x}{5} = 21 \Leftrightarrow 5x + 4(94 - x) = 420 \Leftrightarrow x = 44$.

Vậy, lớp 8A có 44 học sinh và lớp 8B có 50 học sinh.

**Bài tập 12.** Gọi x giờ là số thời gian cần thiết. Sau x giờ, ta có:

- Người thứ nhất đi được một quãng đường là 12x, khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng 60 – 12x.
- Người thứ hai đi được một quãng đường là 15x, khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng 60 – 15x.

Khi đó, ta có: $60 - 12x = 2(60 - 15x) \Leftrightarrow 18x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3^h20'$.

Vậy, sau $3^h20'$ thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B

**Bài tập 13.** Gọi x là độ dài quãng đường AB. Từ giả thiết:

- Người đó đi từ A đến B hết $\frac{x}{30}$ giờ.
- Người đó đi từ B về A hết $\frac{x}{40}$ giờ.

Khi đó, ta có: $\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{45}{60} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 4x - 3x = 90 \Leftrightarrow x = 90$.

Vậy, quãng đường AB dài 90km.

**Bài tập 14.** Gọi vận tốc của canô là x km/h. Từ giả thiết:

- Độ dài đường sông từ A đến B bằng $x.3\frac{1}{3} = \frac{10x}{3}$.
- Vận tốc ôtô bằng x + 17.
- Độ dài đường bộ từ A đến B bằng 2(x + 17).

Khi đó, ta có: $2(x + 17) - \frac{10x}{3} = 2 \Leftrightarrow 6(x + 17) - 10x = 6 \Leftrightarrow 4x = 96 \Leftrightarrow x = 24$

Vậy, vận tốc của canô là 24km/h.

**Bài tập 15.** Gọi vận tốc riêng của canô là x km/h. Từ giả thiết:

- Vận tốc khi đi của canô khi đi xuôi dòng bằng $x + 3$.
- Vận tốc khi đi của canô khi đi ngược dòng bằng $x - 3$.

Khi đó, ta có: $\frac{4}{3}(x + 3) = 2(x - 3) \Leftrightarrow 4(x + 3) = 6(x - 3) \Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$.

Vậy, vận tốc riêng của canô là 15km/h.

**Bài tập 16.** Gọi vận tốc của người thức nhất là x km/h. Từ giả thiết:

- Thời gian để đi từ A đến B của người thứ nhất bằng $\frac{120}{x}$.
- Trên nửa đầu của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc $x + 10$, do đó thờ gian đi bằng $\frac{60}{x+10}$.
- Trên nửa sau của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc $x - 6$, do đó thờ gian đi bằng $\frac{60}{x-6}$.

Khi đó, ta có: $\frac{60}{x+10} + \frac{60}{x-6} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x-6} = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow x(x - 6) + x(x + 10) = 2(x + 10)(x - 6)$

$\Leftrightarrow 4x = 8x - 120 \Leftrightarrow 4x = 120 \Leftrightarrow x = 30$.

Vậy, người thứ nhất đi với vận tốc 30km/h.

# ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

**Bài tập 1.** Cho hai biểu thức: $A = \dfrac{5}{3m + 2}$ và $B = \dfrac{4}{3m - 1}$

Hãy tìm giá trị của m để hai biểu thức ấy có giá trị thỏa mãn hệ thức:

a. $2A + 3B = 0$ b. $AB = A + B$.

**Bài tập 2.** Tính gần đúng nghiệm của các phương trình sau, làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai.

a. $(\sqrt{12}\,x + \sqrt{15})(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\,x) = 0$. b. $(\sqrt{2,3}\,x + \sqrt{5,7})(\sqrt{3} - 2,7x) = 0$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3x - 0,6}{5} - \dfrac{7x - 1,5}{6} = \dfrac{9x + 3}{7} + \dfrac{5 - 4x}{8}$.

b. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} - \dfrac{5x - 6}{3x + 1} = 2 - \dfrac{5}{(x - 5)(3x + 1)}$.

c. $\dfrac{4}{5(x - 3)} + \dfrac{16}{18 - 2x^2} = -\dfrac{5}{7(x + 5)}$.

d. $\dfrac{7x^2}{2(2x^2 - 8)} = \dfrac{3x}{2 - x} - \dfrac{8x + 1}{x + 2}$.

**Bài tập 4.** Cho phương trình (ẩn x): $4x^2 - 9 + k^2 + 12kx = 0$

a. Giải phương trình với $k = 0$.

b. Giải phương trình với $k = -5$.

c. Tìm các giá trị của k sao cho phương trình nhận giá trị $x = 2$ làm nghiệm.

**Bài tập 5.** Giải các phương trình sau:

a. $(x + 3)(x^3 - 4x^2 + 5x - 15) = (x + 3)(x^3 - 4x^2 + 1)$.

b. $\dfrac{-9x^2 + 5}{x^3 - 1} = \dfrac{4}{x^2 + x + 1} - \dfrac{5}{x - 1}$

c. $3x^2 + x = 2 - 7x$.

d. $\dfrac{x - 4}{x + 3} - \dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{3(x - 9)}{x^2 - 9}$

**Bài tập 6.** Giải các phương trình sau:

a. $x - 39 = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2 - 3x}{5}$. b. $\dfrac{x + 1}{2002} + \dfrac{x - 1}{2003} = \dfrac{x + 2}{2001} + \dfrac{x - 2}{2004}$

**Bài tập 7.** Giải các phương trình:

a. $(x + 1)^2 + (2 - 3x)(x + 1) = 0$. b. $x^2 - 4x + 4 = (2x - 3)(x - 2)$.

c. $(x - 1)^2 = 4$. d. $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2$.

e. $x^2 + (x + 1)(13 - 8) = 1$. f. $x^3 - (x^2 + x + 1)(2x - 1) = 1$.

**Bài tập 8.** Giải các phương trình:

a. $3x^2 = 2x - 6$.  b. $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$.

c. $x^3 - 9x = -6x^2$.  d. $(2x + 5)(2x - 5) = 17$.

**Bài tập 9.** Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1-3x}{x-5} + \frac{2x-1}{2-x} = \frac{4}{x^2-7x+10}$.  b. $\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{x+3} = \frac{9}{2x^2+5x-3}$.

**Bài tập 10.** Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x}{x-5} + \frac{-1}{25-x^2} = \frac{8}{x+5}$.  b. $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2} = 5$

**Bài tập 11.** Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$. Biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

**Bài tập 12.** Giải phương trình: $x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72 = 0$. Biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 2$.

**Bài tập 13.** * Giải các phương trình:

a. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.  b. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$.

c. $2x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 3x - 2 = 0$.  d. $x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$.

e. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$.  f. $x^4 + 2x^3 + 10x - 25 = 0$.

**Bài tập 14.** Hai người cùng đi một lúc từ A đến B, đường dài 120km. Người thứ nhất đi vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Người thứ hai đi trên nửa đầu của quãng đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của người thứ nhất là 10km/h, đi trên nửa sau của quãng đường với vận tốc kém vận tốc người thứ nhất là 6km/h. Biết rằng hai người đến B cùng một lúc, tính vận tốc của người thứ nhất.

**Bài tập 15.** Số nhà của An là một số tự nhiên có hai chữ số. Nếu thêm chữ số 8 vào bên trái số đó thì được một số kí hiệu là A. Nếu thêm chữ số 8 vào bên phải số đó thì được một số kí hiệu là B. Tìm số nhà của An, biết rằng: A – B = 475.

**Bài tập 16.** Bình thường, bạn Lan đi học từ nhà đến trường với vận tốc 5km/h thì vừa đúng giờ vào lớp. Nhưng hôm nay, do dậy hơi muộn so với bình thường 24 phút nên bạn Lan phải chạy với vận tốc 7,5km/h và đã đến trường đúng giờ. Hỏi quãng đường từ nhà bạn Lan đến trường ?

**Bài tập 17.** Một đội thợ mỏ lập kế hoạch khai thác than, theo đó mỗi ngày phải khai thác được 50 tấn than. Khi thực hiện, mỗi ngày đội khai thác được 57 tấn. Do đó, đội đã hoàn thành sớm hơn dự định trước 1 ngày và còn vượt mực kế hoạch 13 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội phải khai thác bao nhiêu tấn than ?

**Bài tập 18.** Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 1 giờ thì hoàn thành $\frac{3}{10}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm bao nhiêu lâu mới hoàn thành công việc ? Biết rằng năng suất của người thứ nhất gấp đôi năng suất của người thứ hai.

**Bài tập 19.** Hai ôtô cùng khởi hành từ Lạng Sơn về Hà Nội. Trong 43km đầu, hai xe có cùng vận tốc. Sau đó chiếc xe thứ hai tăng vận tốc lên gấp 1,2 lần vận tốc ban đầu, trong khi chiếc xe thứ hai vẫn duy trì vận tốc ban đầu. Do đó, xe thứ nhất đã đến Hà Nội sớm hơn xe thứ hai 40 phút. Tính vận tốc ban đầu của hai xe. Biết quãng đường từ Lạng Sơn về Hà Nội dài 163km.

**Bài tập 20.** Một đoàn tàu hỏa đi từ Hà Nội vào thành phố Hồ Chí Minh. Sau 1 giờ 48 phút, một đoàn tàu hỏa khởi hành từ Nam Định cũng đi thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc nhỏ hơn của đoàn tàu thứ nhất là 5km/h. Trên đường đi, hai đoàn tàu đã gặp nhau sau 4 giờ 48 phút kể từ khi đoàn tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi đoàn tàu. Biết rằng ga Nam Định nằm trên đường đi Hà Nội – thành phố Hồ Chí Minh và ga Nam Định cách ga Hà Nội 87km.

**Bài tập 21.** Lúc 7 giờ sáng, một chiếc canô xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi ngay lập tức quay trở lại bến A. Tính vận tốc của canô khi đi xuôi dòng. Biết:

- Bến A cách bến B 36km.
- Khi canô quay trở về bến A là 11 giờ 30 phút.
- Vận tốc của dòng nước là 6km/h.

**Bài tập 22.** Một người đi xe máy từ điểm A đến điểm B với vận tốc 60km/h, Cùng lúc đó, một người đi ôtô từ điểm B về A với vận tốc 75km/h và đã gặp người đi xe máy tại điểm C. Hỏi quãng đường AC dai bao nhiêu km. Biết quãng đường AB dài 135km.

**Bài tập 23.** Một xí nghiệp dự định đánh bắt 145 tấn cá trong một thời gian nhất định. Nhưng thực tế mỗi ngày họ đã đánh bắt được vượt kê hoạch 1 tân nên đã hoàn thành sớm so với dự định 4 ngày và vượt mức kế hoạch 5 tấn. Hỏi thời gian dự định hoàn thành kế hoạch.

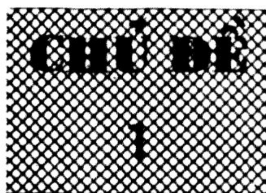
**Bài tập 24.** Để chảy đầy một bể nước, người ta có thể cho vòi I chảy trong 1,5 giờ hoặc cho vòi II chảy trong 2 giờ. Người ta đã cho vòi I chảy trong một thời gian, rồi khoá lại và cho vòi II chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì bể đầy. Tính xem mỗi vòi đã chảy trong bao lâu ?

**Bài tập 25.** Một tổ sản xuất phải làm một số dụng cụ trong một thời gian, tính ra mỗi ngày phải làm 30 dụng cụ, Do tổ đã làm mỗi ngày 40 dụng cụ nên không những đã làm thêm 20 dụng cụ mà tổ đó còn làm xong trước hạn 7 ngày. Tính số dụng cụ mà tổ sản xuất đó phải làm theo kế hoạch.

# CHƯƠNG II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chương này, gồm có:

1. **Mối liên hệ giữa thứ tự với phép cộng và phép nhân**
2. **Bất phương trình một ẩn**
3. **Bất phương trình bậc nhất một ẩn**
4. **Phương trình chứa dấu trị tuyệt đối**



# MỐI LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VỚI PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRÊN TẬP SỐ

Trên tập số thực, với hai số a và b sẽ xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Số a *bằng* số b, kí hiệu là a = b.
- Số a *nhỏ hơn* số b, kí hiệu là a < b.
- Số a *lớn hơn* số b, kí hiệu là a > b.

từ đó ta có thêm nhận xét:

- Nếu a *không nhỏ hơn* b thì a = b hoặc a > b, khi đó ta nói a *lớn hơn hoặc bằng b*, kí hiệu là $a \ge b$.
- Nếu a *không lớn hơn* b thì a = b hoặc a < b, khi đó ta nói a *nhỏ hơn hoặc bằng b*, kí hiệu là $a \le b$.

### 2. BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng: A > B, $A \ge B$

A < B, $A \le B$.

### 3. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Nhận xét rằng:

- Ta có 6 > 4, nếu cộng hai vế với số 2, ta được:

  $6 + 2 > 4 + 2 \Leftrightarrow 8 > 6$, luôn đúng.

- Ta có 6 > 4, nếu cộng hai vế với số −3, ta được:

  $6 - 3 > 4 - 3 \Leftrightarrow 3 > 1$, luôn đúng.

Từ đó, ta có được tính chất:

*Tính chất*: Với ba số a, b và c, ta có:

- Nếu a > b thì a + c > b + c.
- Nếu $a \ge b$ thì $a + c \ge b + c$.
- Nếu a < b thì a + c < b + c.
- Nếu $a \le b$ thì $a + c \le b + c$.

> *Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*

**Thí dụ 1:** Cho a > b. Chứng minh rằng a − b > 0.

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết: a > b

cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với −b, ta được:

$a - b > b - b \Leftrightarrow a - b > 0$, đpcm.

## 4. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

Nhận xét rằng:

Ta có $5 > 2$, nếu nhân hai vế với số 3, ta được:

$5.3 > 2.3 \Leftrightarrow 15 > 6$, luôn đúng.

Ta có $5 > 2$, nếu nhân hai vế với số $-1$, ta được:

$5.(-1) > 2.(-1) \Leftrightarrow -5 > -2$, mâu thuẫn.

Từ đó, ta có được tính chất:

*Tính chất*: Với ba số a, b và $c > 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a.c > b.c$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a.c \geq b.c$.
- Nếu $a < b$ thì $a.c < b.c$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a.c \leq b.c$.

*Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*

**Thí dụ 2:** Cho bất đẳng thức $m > 0$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức $\frac{1}{m} > 0$.

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết: $m > 0$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{m^2}$, ta được:

$$m.\frac{1}{m^2} > 0.\frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 0.$$

**Nhận xét**: Như vậy, với a, b và $c > 0$, ta còn có:

- Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \geq b$ thì $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.
- Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \leq b$ thì $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Vậy, *khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*

*Tính chất*: Với ba số a, b và c < 0, ta có:

- Nếu a > b thì a.c < b.c và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu a ≥ b thì a.c ≤ b.c và $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$.
- Nếu a < b thì a.c > b.c và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu a ≤ b thì a.c ≥ b.c và $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$.

| |
|---|
| *Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.* |

**Thí dụ 3:** Hãy xác định dấu của số a, biết:

a. 6a > 3a. b. $a \le \frac{a}{2}$.

*Giải*

a. Ta viết lại: 6a > 3a ⇔ 6.a > 3.a, tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng 6 > 3 với a.
Vậy, từ sự cùng chiều của hai bất đẳng thức suy ra a > 0.

b. Ta viết lại: $a \le \frac{a}{2} \Leftrightarrow 1.a \le \frac{1}{2}.a$ tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng $1 > \frac{1}{2}$ với a.
Vậy, từ sự ngược chiều của hai bất đẳng thức suy ra a ≤ 0.

## 5. TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

Nhận xét rằng: 8 > 6 và 6 > 3 ⇒ 8 > 3.

*Tính chất*: Với ba số a, b và c, nếu a > b và b > c thì a > c.

**Thí dụ 4:** Cho a < b, chứng minh rằng 2a – 3 < 2b + 6.

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết: a < b
nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được: 2a < 2b.
tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức với –3, ta được: 2a – 3 < 2b – 3. (1)
Cộng cả hai vế của bất đẳng thức đúng –3 < 6 với 2b, ta được:

2b – 3 < 2b + 6. (2)

Từ (1), (2) theo tính chất bắc cầu suy ra: 2a – 3 < 2b + 6, đpcm.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho a > b > 0, hãy chứng tỏ rằng:

a. $a^2 > ab$. b. $a^3 > b^3$.

*Giải*

a. Với bất đẳng thức giả thiết: $a > b$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a > 0$, ta được: $a^2 > ab$, đpcm. (1)

b. Với bất đẳng thức giả thiết: $a > b$

- Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a^2 > 0$, ta được: $a^3 > a^2b$. (2)
- Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $b > 0$, ta được: $ab > b^2$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra: $a^2 > b^2$. (4)

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (4) với $b > 0$, ta được: $a^2b > b^3$. (5)

Từ (2) và (5) suy ra: $a^3 > b^3$, đpcm.

**Chú ý:** 1. Bất đẳng thức $a^2 > ab$ vẫn đúng với điều kiện:

$a > b$ và $a > 0$ (hoặc $a < b$ và $a < 0$).

2. Bất đẳng thức $a^3 > b^3$ vẫn đúng với điều kiện $a > b$.

**Ví dụ 2:** Cho $a > b > 0$, hãy chứng tỏ rằng $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

*Giải*

Từ giả thiết $a, b > 0$ suy ra: $ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} > 0$.

Với bất đẳng thức giả thiết: $a > b$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{ab}$,

ta được: $a.\frac{1}{ab} > b.\frac{1}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, đpcm.

**Nhận xét:** Ta có kết quả tổng quát hơn:

" *Nếu $a > b$ thì:* $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0\end{array}\right.$ "

**Ví dụ 3:** Cho $a < b$ và $c < d$, hãy chứng tỏ rằng $a + c < b + d$.

*Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết: $a < b$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số c, ta được: $a + c < b + c$. (1)

Với bất đẳng thức giả thiết: $c < d$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số b, ta được: $b + c < b + d$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a + c < b + d$, đpcm.

**Nhận xét:** 1. Bất đẳng thức trên được phát biểu " *Khi cộng theo vế của hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho* ".

2. Ta còn có kết quả: "*Nếu $0 < a < b$ và $0 < c < d$ thì $a.c < b.d$*"

**Ví dụ 4:** Cho a, b bất kì, hãy chứng tỏ rằng:

a. $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. b. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương bất đẳng thức:

$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Với bất đẳng thức giả thiết: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với $-2ab$, ta được:

$a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

**Nhận xét:** **1.** Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy ngay rằng "*Để chứng minh một bất đẳng thức ngoài việc sử dụng các tính chất thứ tự với phép cộng và phép nhân chúng ta còn có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một bất đẳng thức đúng biến đổi về bất đẳng thức cần chứng minh)*".

**2.** Xuất phát từ kết quả $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, nếu đặt $x = a^2$, $y = b^2$ (khi đó $x, y \geq 0$) thì ta nhận được một bất đẳng thức dạng:

$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, với $x, y \geq 0$.

Bất đẳng thức trên được gọi là *Bất đẳng thức Côsi*.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu quan hệ thứ tự trên tập số.

**Câu hỏi 2:** Nêu định nghĩa bất đẳng thức và cho ví dụ.

**Câu hỏi 3:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.

**Câu hỏi 4:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương.

**Câu hỏi 5:** Phát biểu liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm.

**Câu hỏi 6:** Phát biểu tính chất bắc cầu của thứ tự.

**Câu hỏi 7:** Hãy chứng minh các tính chất sau của bất đẳng thức.

Với a, b, c, d là các số thực, ta luôn có:

*Tính chất 1:* Nếu a > b thì: $\left[\begin{array}{l} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right.$.

*Tính chất 2:* Nếu a > b và c > d thì a + c > b + d.

*Chú ý quan trọng*: không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

*Tính chất 3:* Nếu a > b > 0 và c > d > 0 thì ac > bd.

*Tính chất 4:* Nếu a > b thì: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{array}\right.$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hãy sử dụng dấu " $>, \geq, <, \leq$ " để so sánh các số a và b, biết:

a. $a - b = 0$. b. $a - b = 1$ c. $b - a = 2$.

**Bài tập 2.** Hãy xác định dấu của số a, biết:

a. $4a < 3a$. b. $a \geq \frac{2a}{3}$.

**Bài tập 3.** Cho a > b > 0, hãy chứng tỏ rằng:

a. $b^2 < ab$. b. $a^2 > b^2$.

**Bài tập 4.** Cho bất đẳng thức m < 0. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức $\frac{1}{m} < 0$.

**Bài tập 5.** Cho a > b và ab < 0, hãy chứng tỏ rằng $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

**Bài tập 6.** Cho ví dụ chứng tỏ rằng từ a > b không thể suy ra $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

**Bài tập 7.** Cho 0 < a < b và 0 < c < d, hãy chứng tỏ rằng a.c < b.d.

**Bài tập 8.** Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $a^2 - 6a + 10 \geq 1$. b. $(a - 3)(a - 5) + 2 > 0$.

c. $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0$. d. $a^2 \geq 2b(a - b)$.

**Bài tập 9.** Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0$ với a, b là các số dương.

b. $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$ với a, b là các số dương.

c. $ab + bc + ca \leq 0$ nếu $a + b + c = 0$.

**Bài tập 10.** Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $(a + b)^2 \geq 4ab$. b. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

c. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

**Bài tập 11.** Biết a > b > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $a = b$.  b. $a > b$  c. $a < b$.

**Bài tập 2.** Hãy xác định dấu của số a, biết:

a. $a < 0$.  b. $a \geq 0$.

**Bài tập 3.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 4.** Với $m < 0$, khi đó, ta nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số $\frac{1}{m^2} > 0$

sẽ nhận được bất đẳng thức $\frac{1}{m} < 0$.

**Bài tập 5.** Ta lần lượt có nhận xét:

- Vì $ab < 0$ nên a và b trái dấu.
- Vì $a > b$ nên kết hợp với nhận xét trên suy ra $a > 0$ và $b < 0$.

Khi đó: $\frac{1}{a} > 0$ và $\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

**Bài tập 6.** Chọn $a = 2$ và $b = -3$, ta thấy ngay: $a > b$ vì $2 > -3$.

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ là không thể bởi khi đó $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ là mâu thuẫn.

**Bài tập 7.** Ta lần lượt tận dụng:

- Vì $0 < a < b$ và $c > 0$ nên $ac < bc$. (1)
- Vì $0 < c < d$ và $b > 0$ nên $bc < bd$. (2)

Từ (1), (2) dựa trên tính chất bắc cầu suy ra $a.c < b.d$.

**Bài tập 8.**

a. Ta biến đổi: $a^2 - 6a + 10 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Ta biến đổi: $(a - 3)(a - 5) + 2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 17 > 0$

$\Leftrightarrow (a - 4)^2 + 1 > 0$, luôn đúng.

c. Ta biến đổi: $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(4a^2 - 4a + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(2a - 1)^2 \geq 0$, luôn đúng.

d. Ta biến đổi: $a^2 \geq 2b(a - b) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + b^2 \geq 0$, luôn đúng.

**Bài tập 9.**

a. Ta biến đổi: $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với a, b là các số dương (vì ta có $a + b > 0$).

b. Ta biến đổi: $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^4(a - b) - b^4(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^4 - b^4)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b)(a^2 + b^2) \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với a, b là các số dương (vì ta có $a + b > 0$).

c. Sử dụng giả thiết: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

$\Leftrightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$, đpcm

**Bài tập 10.**

a. Ta biến đổi: $(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Ta biến đổi: $\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$, tiếp theo biến đổi như câu a).

c. Ta biến đổi: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$, luôn đúng.

**Bài tập 11.** Với $a > b > 0$ ta biến đổi:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.




# BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

<u>**Thí dụ 1:**</u> Ta gọi các hệ thức:

- $2x + 3 < x - 2$ là một bất phương trình với ẩn số x.
- $3y - 2 \geq y$ là một bất phương trình với ẩn số y.

...

từ đó ta có được định nghĩa về bất phương trình một ẩn:

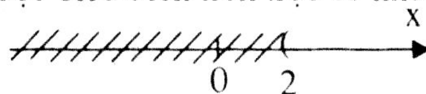
> *Một bất phương trình với ẩn x có dạng:*
>
> *$A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$)*
>
> *trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.*

## 2. TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

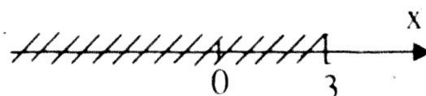
| |
|---|
| Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình đó. |

**Thí dụ 2:** Ta có:

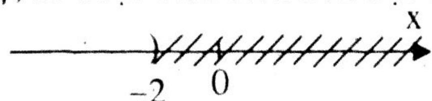
a. Tập nghiệm của bất phương trình $x > 2$ là tập hợp các số lớn hơn 2, tức là tập $\{x| x > 2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



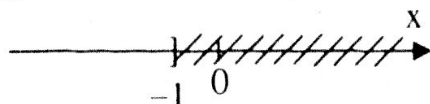

b. Tập nghiệm của bất phương trình $x \geq 3$ là tập hợp các số lớn hơn hoặc bằng 3, tức là tập $\{x| x \geq 3\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:




c. Tập nghiệm của bất phương trình $x < -2$ là tập hợp các số nhỏ hơn - 2, tức là tập $\{x| x < -2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:




d. Tập nghiệm của bất phương trình $x \leq 1$ là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 1, tức là tập $\{x| x \leq 1\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:




| |
|---|
| Khi bài toán yêu cầu *giải một bất phương trình*, ta phải tìm *tập nghiệm* của bất phương trình đó. |

**Thí dụ 3:** Cho bất phương trình: $x^2 - 4x < 3x$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không ?

a. $x = -2$. b. $x = 1$. c. $x = 3$.

*Giải*

a. Thay $x = -2$ và bất phương trình, ta được:

$(-2)^2 - 4(-2) < 3(-2) \Leftrightarrow 4 + 8 < -6 \Leftrightarrow 12 < -6$, mâu thuẫn.

Vậy, $x = -2$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 1$ và bất phương trình, ta được:

$1^2 - 4.1 < 3.1 \Leftrightarrow 1 - 4 < 3 \Leftrightarrow -3 < 3$, luôn đúng.

Vậy, $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 3$ và bất phương trình, ta được:

$3^2 - 4.3 < 3.3 \Leftrightarrow 9 - 12 < 9 \Leftrightarrow -3 < 9$, luôn đúng.

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

### 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

*Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.*

**Thí dụ 4:** Hai bất phương trình: $x > 8$ và $8 < x$

là hai bất phương trình tương đương, khi đó ta viết: $x > 8 \Leftrightarrow 8 < x$.

**Thí dụ 5:** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $x^2 - 2 > x$ và $x^2 > x + 2$.

b. $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ và $x < 1$.

*Giải*

a. Với bất phương trình: $x^2 - 2 > x$

cộng 2 vào hai vế của bất phương trình, ta được:

$x^2 - 2 + 2 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 > x + 2$.

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, số 0 là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho bất phương trình: $x^2 - 4x \le 2x - 8$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không ?

a. $x = 0$. b. $x = 3$. c. $x = 4$.

*Giải*

a. Thay $x = 0$ và bất phương trình, ta được: $0 \le -8$, mâu thuẫn.

Vậy, $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 3$ và bất phương trình, ta được:

$3^2 - 4.3 \le 2.3 - 8 \Leftrightarrow 9 - 12 \le 6 - 8 \Leftrightarrow -3 \le -2$, luôn đúng.

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 4$ và bất phương trình, ta được:

$4^2 - 4.4 \le 2.4 - 8 \Leftrightarrow 16 - 16 \le 8 - 8 \Leftrightarrow 0 \le 0$, luôn đúng.

Vậy, $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình.

**Chú ý:** Ta có $0 \le 0$ cũng là một bất đẳng thức đúng, bởi:

$a \ge b$ khi và chỉ khi $a > b$ hoặc $a = b$.

**Ví dụ 2:** Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

a. Tổng của một số nào đó và 4 lớn hơn 9.

b. Hiệu của 8 và 3 lần số nào đó nhỏ hơn 11.

*Giải*

a. Gọi số cần tìm là x.

Từ giả thiết "*Tổng của x và 4 lớn hơn 9*", ta được: $x + 4 > 9$.

Ta có thể chọn $x = 6$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

b. Gọi số cần tìm là x.

Từ giả thiết "*Hiệu của 8 và 3 lần số x nhỏ hơn 11*", ta được: $8 - 3x < 11$.

Ta có thể chọn $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

**Ví dụ 3:** Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

a. $|x - 3| < 6$. b. $|x + 1| \geq 8$.

*Giải*

a. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 6$, thật vậy:

- Với $x = -1$, ta có: $|-1 - 3| < 6 \Leftrightarrow |-4| < 6 \Leftrightarrow 4 < 6$, luôn đúng.
- Với $x = 6$, ta có: $|6 - 3| < 6 \Leftrightarrow |3| < 6 \Leftrightarrow 3 < 6$, luôn đúng.

b. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -9$ và $x = 8$, thật vậy:

- Với $x = -9$, ta có: $|-9 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |-8| \geq 8 \Leftrightarrow 8 \geq 8$, luôn đúng.
- Với $x = 8$, ta có: $|8 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |9| \geq 8 \Leftrightarrow 9 \geq 8$, luôn đúng.

**Ví dụ 4:** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $x + 1 < 2x$ và $3x < 4x - 1$. b. $x > 3$ và $x^2 - 4x + 3 > 0$.

*Giải*

a. Với bất phương trình: $x + 1 < 2x$

cộng $2x - 1$ vào hai vế của bất phương trình, ta được:

$x + 1 + 2x - 1 < 2x + 2x - 1 \Leftrightarrow 3x < 4x - 1$.

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Cho một vài ví dụ về bất phương trình một ẩn.

**Câu hỏi 2:** Cho ví dụ một bất phương trình vô nghiệm.

**Câu hỏi 3:** Cho ví dụ một bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

**Câu hỏi 4:** Thế nào là giải bất phương trình $A(x) > B(x)$ ?

**Câu hỏi 5:** Định nghĩa hai bất phương trình tương đương.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Viết tập nghiệm của bất phương trình sau bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm đó trên trục số:

a. $3 > x$.  b. $x < -2$.  c. $x \geq -1$.  d. $x \leq 8$.

**Bài tập 2.** Cho ví dụ một bất phương trình có:

a. Tập hợp nghiệm là bất kì số nào.  b. Tập hợp nghiệm bằng $\varnothing$.

**Bài tập 3.** Tìm các số x thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

a. $x > 3$ và $x < 8$.  b. $x > 5$ và $x > 3$.  c. $x > 2$ và $x < -1$.

**Bài tập 4.** Cho bất phương trình: $10x - 15 \geq x^2 + 6$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không ?

a. $x = 5$.  b. $x = -2$.  c. $x = 7$.

**Bài tập 5.** Cho bất phương trình: $x + 20 > x^2$.

a. Hãy kiểm tra xem các số –5, 1, 3 có phải là nghiệm của bất phương trình không ?

b. Gọi S là tập hợp các số x thoả mãn $-4 < x < 5$. Chọn một phần tử bất kì của tập hợp S, chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Bài tập 6.** Cho bất phương trình: $x^2 + 3 > 4x$.

a. Hãy kiểm tra xem các số 0, 2, 4 có phải là nghiệm của bất phương trình không ?

b. Đặt $S = \{x \mid x < 1 \text{ hoặc } x > 3\}$. Chọn một phần tử bất kì của tập hợp S, chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Bài tập 7.** Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

a. Tổng của 3 lần số nào đó và 8 lớn hơn –1.

b. Tổng của một số nào đó và 3 lớn hơn hoặc bằng 11.

c. Hiệu của 9 và 4 lần số nào đó không nhỏ hơn 8.

**Bài tập 8.** Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

a. $|x - 2| < 11$.  b. $|3 - x| > 5$.

c. $|2x + 1| \geq 3$.  d. $|1 - 3x| < 9$.

**Bài tập 9.** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $2 - x < 0$ và $x - 2 > 0$.

b. $|x - 2| < 0$ và $|2 - x| < 0$.

c. $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$ và $x < 1$.

d. $x < 1$ và $x^2 < 1$.

e. $x > 3$ và $x^2 > 9$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$. b. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2\}$.

c. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1\}$. d. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 8\}$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 2.**

a. Bất phương trình $x^2 + 1 > 0$ có tập hợp nghiệm là bất kì số nào.

b. Bất phương trình $x^2 + 1 < 0$ có tập hợp nghiệm bằng $\varnothing$.

**Bài tập 3.** Tìm các số x thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

a. $3 < x < 8$. b. $x > 5$. d. Không tồn tại.

**Bài tập 4.**

a. $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình.

b. $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình.

c. $x = 7$ là nghiệm của bất phương trình.

**Bài tập 5.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 6.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 7.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 8.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 9.**

a. Khi nhân hai vế của bất phương trình $2 - x < 0$ với $-1$, ta được: $x - 2 > 0$ đó chính là bất phương trình còn lại.

Vậy, hai bất phương trình là tương đương.

b. Ta luôn có $|a| = |-a|$ nên bất phương trình:

$|x - 2| < 0 \Leftrightarrow |-(x - 2)| < 0 \Leftrightarrow |2 - x| < 0$

đó chính là bất phương trình còn lại.

Vậy, hai bất phương trình là tương đương.

c. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

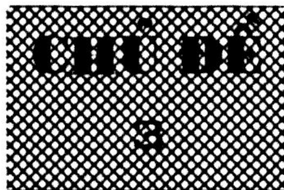
- $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình $x < 1$.
- $x = 0$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$.

d. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

- $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình $x < 1$.
- $x = -2$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x^2 < 1$.

e. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

- $x = -4$ là nghiệm của bất phương trình $x^2 > 9$.
- $x = -4$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x > 3$.



# BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

## 1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

### 1.1. Quy tắc chuyển vế

Với các bất đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$a + b < c \Leftrightarrow a + b - c < 0 \rightarrow$ *chuyển vế và đổi dấu*

và với các bất phương trình chúng ta cũng có được quy tắc như vậy, cụ thể:

> ***(Quy tắc chuyển vế)**: Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.*

Sử dụng quy tắc trên, bước đầu chúng ta có thể giải được một vài bất phương trình đơn giản, thí dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

**Thí dụ 1:** Sử dụng quy tắc chuyển vế giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

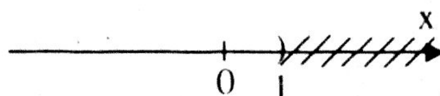
a. $x + 3 < 4$.  b. $3x \geq 2x - 2$.

*Giải*

a. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$x + 3 < 4 \Leftrightarrow x < 4 - 3 \Leftrightarrow x < 1$.

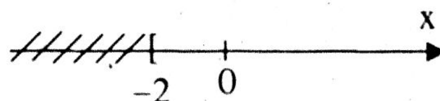
Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 1$ và ta có biểu diễn:




b. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$3x \geq 2x - 2 \Leftrightarrow 3x - 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \geq -2$ và ta có biểu diễn:




### 1.2. Quy tắc nhân với một số

Với các bất đẳng thức, ta có thể biến đổi:

$2a + 4b > -2 \Leftrightarrow 1 + 2b = -1 \rightarrow$ *nhân cả hai vế với* $\frac{1}{2} > 0$

*hoặc chia cả hai vế cho 2 > 0)*

$-3a < 6 \Leftrightarrow a > -2 \rightarrow$ *nhân cả hai vế với* $-\frac{1}{3} < 0$

*(hoặc chia cả hai vế cho −3 < 0)*

và với các bất phương trình chúng ta cũng có được quy tắc như vậy, cụ thể:

> *(**Quy tắc nhân với một số**): Khi nhân (hoặc chia) cả hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:*
>
> 1. *Giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương.*
> 2. *Đổi chiều của bất phương trình nếu số đó âm.*

sử dụng quy tắc trên, bước đầu chúng ta có thể giải được một vài bất phương trình đơn giản, thí dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

**Thí dụ 2:** Sử dụng quy tắc nhân với một số giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $3x < -6$.

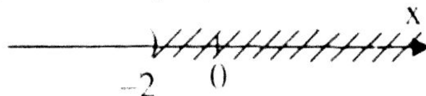
b. $-\frac{1}{2}x \geq -2$.

*Giải*

a. Sử dụng quy tắc nhân với một số, biến đổi phương trình về dạng:

$3x < -6 \Leftrightarrow x < -2$.

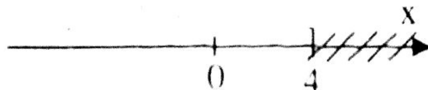
Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -2$ và ta có biểu diễn:




b. Sử dụng quy tắc nhân với một số, biến đổi phương trình về dạng:

$-\frac{1}{2}x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \leq 4$ và ta có biểu diễn:




> **Chú ý**: Tiếp theo, chúng ta minh hoạ việc sử dụng đồng thời hai quy tắc biến đổi bất phương trình để bước đầu làm quen với việc giải một bất phương trình.

**Thí dụ 3:** Sử dụng hai quy tắc biến đổi bất phương trình để giải các bất phương trình sau:

a. $3x > x + 8$.

b. $x^2 + 2x > x^2 - 4$.

*Giải*

a. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi bất phương trình về dạng:

$3x - x > 8 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 4$.

b. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi bất phương trình về dạng:

$x^2 + 2x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x^2 > -4 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > -2$.

**Nhận xét:** 1. Trong lời giải các phương trình trên, chúng ta đã thừa nhận rằng kết quả "*Từ một bất phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho*".

2. Cũng chính nhờ những quy tắc này mà việc chứng minh một bất đẳng thức sẽ đơn giản hơn rất nhiều - *Điều này chúng ta sẽ gặp lại trong chủ đề chuyên sâu về bất đẳng thức ở cuối chương.*

## 2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

***Định nghĩa**: Bất phương trình dạng:*

$$ax + b > 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \le 0,\ ax + b \ge 0,$$

*với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.*

**Thí dụ 4:** Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$.    b. $mx + (m - 1)y + 4 \le 0$.

*Giải*

a. Để bất phương trình: $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$

là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với m = 2 bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để bất phương trình: $mx + (m - 1)y + 4 \le 0$

là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

*Trường hợp 2*: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với m = 1, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với m = 0, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn y.

*Bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$, $a \neq 0$ được giải như sau: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$.*

- *Với $a > 0$, ta được $x > -\frac{b}{a}$.*
- *Với $a < 0$, ta được $x < -\frac{b}{a}$.*

**Thí dụ 5:** Giải các bất phương trình sau:

a. $2x - 3 > 0$.

b. $6 - 3x \leq 0$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng: $2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > \frac{3}{2}$.

b. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng: $-3x \leq -6 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** So sánh số a với số b, biết:

a. $x < 2 \Leftrightarrow (a - b)x < 2(a - b)$.

b. $x > 8 \Leftrightarrow (a - b)x < 8(a - b)$.

*Giải*

a. Nhận xét rằng:

- Hai bất phương trình $x < 2$ và $(a - b)x < 2(a - b)$ là hai bất phương trình cùng chiều.
- Bất phương trình thứ hai có được sau khi nhân hai vế của bất phương trình thứ nhất với số $(a - b)$.

Suy ra: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

b. Nhận xét rằng:

- Hai bất phương trình: $x > 8$ và $(a - b)x < 8(a - b)$ là hai bất phương trình ngược chiều.
- Bất phương trình thứ hai có được sau khi nhân hai vế của bất phương trình thứ nhất với số $(a - b)$.

Suy ra: $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

**Ví dụ 2:** Giải các bất phương trình sau:

a. $-4x + 12 > 0$.

b. $3 - 4x \geq 19$.

c. $(m^2 + 1)x - m^4 < -1$, với m là tham số.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng: $-4x > -12 \Leftrightarrow x < 3$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 3$.

b. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$-4x \geq 19 - 3 \Leftrightarrow -4x \geq 16 \Leftrightarrow x \leq -4$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \leq -4$.

c. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng: $(m^2 + 1)x < m^4 - 1$. (*)

Vì $m^2 + 1$ luôn dương với mọi m nên khi chia cả hai vế của bất phương trình (*) cho $m^2 + 1$ thì dấu bất phương trình không thay đổi, cụ thể ta được:

$$x < \frac{m^4 - 1}{m^2 + 1} = \frac{(m^2 - 1)(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = m^2 - 1 \Leftrightarrow x < m^2 - 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < m^2 - 1$.

**Ví dụ 3:** Cho bất phương trình: $(m^2 - 2m)x + 1 < m$.

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. $m = 1$. b. $m = 2$. c. $m = 3$.

*Giải*

a. Với $m = 1$, bất phương trình có dạng:

$(1^2 - 2.1)x + 1 < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình có nghiệm $x > 0$.

b. Với $m = 2$, bất phương trình có dạng:

$(2^2 - 2.2)x + 1 < 2 \Leftrightarrow 0x < 1$, luôn đúng.

Vậy, với $m = 2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c. Với $m = 3$, bất phương trình có dạng:

$$(3^2 - 2.3)x + 1 < 3 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m = 3$ bất phương trình có nghiệm $x < \frac{2}{3}$.

**Ví dụ 4:** Tìm x để $A < 0$, biết: $A = 1 - \frac{2x + 3}{2}$.

*Giải*

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức A:

$$A = 1 - \frac{2x + 3}{2} = \frac{2 - 2x - 3}{2} = \frac{-2x - 1}{2}.$$

Để A < 0, ta phải có: $\frac{-2x-1}{2} < 0 \Leftrightarrow -2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -2x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Vậy, với $x > -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Định nghĩa bất phương trình bậc nhất một ẩn và cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Phát biểu hai quy tắc biến đổi bất phương trình.

**Câu hỏi 3:** Hai quy tắc biến đổi bất phương trình cũng giống như hai quy tắc biến đổi phương trình. Điều này có đúng không ?

**Câu hỏi 4:** Nếu phương pháp giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hãy nhân hai vế của mỗi bất phương trình sau với một số thích hợp để đưa bất phương trình về dạng x < a hoặc x > a:

a. $2x > -4$. b. $\frac{1}{3}x < 3$. c. $8x > 32$. d. $27x > -3$.

**Bài tập 2.** Dùng các phép biến đổi tương đương để đưa các bất phương trình sau về dạng x < a hoặc x > a:

a. $3x + 2 < 8$. b. $5 - 4x < -7$.

c. $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1$, với m là tham số.

**Bài tập 3.** So sánh số a với số b, biết:

a. $x > 6 \Leftrightarrow (a - b)x < 6(a - b)$. b. $x > 2 \Leftrightarrow (a - b)x > -2(b - a)$.

**Bài tập 4.** Tìm điều kiện của tham số m để bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$. b. $mx + (m + 2)y + 8 < 0$.

**Bài tập 5.** Giải các bất phương trình:

a. $2x - 1 > 3$. b. $8 - 4x < 6$.

**Bài tập 6.** Tìm x biết:

a. $2x - 1 > 0$. c. $x^2 - 5x < x^2 + 1$.

b. $8 - 4x < 0$. d. $2x + 1 > 5x - 2$.

**Bài tập 7.** Tìm x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $\frac{1}{2}x - 3$. b. $5x^2 + 11$. c. $\frac{3-2x}{x^2+1}$. d. $\frac{2x^2-4x}{x-2}$.

**Bài tập 8.** Cho bất phương trình: $(m^2 - 4m + 3)x + 1 \geq m$.

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. $m = 0$. b. $m = 1$. c. $m = 3$.

**Bài tập 9.** Với giá trị nào của m thì phương trình ẩn x:

a. $x - 3 = m + 4$ có nghiệm lớn hơn 2.

b. $2x - 3 = 2m + 8$ có nghiệm dương.

c. $3x - 1 = 6m + 8$ có nghiệm không nhỏ hơn 6.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 2.**

a. $x < 3$.

b. $x > 3$.

c. Ta biến đổi: $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1 \Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < 4m^4 - 1$

$\Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < (2m^2 + 1)(2m^2 - 1)$. (1)

Vì $2m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên: (1) $\Leftrightarrow x < 2m^2 - 1$.

Vậy, bất phương trình được chuyển thành $x < 2m^2 - 1$.

**Bài tập 3.**

a. $a < b$. b. $a > b$.

**Bài tập 4.**

a. Để bất phương trình: $m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$

là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m(m^2 - 1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$ bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để bất phương trình: $mx + (m + 2)y + 8 < 0$.

là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

*Trường hợp 2*: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với $m = -2$, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với $m = 0$, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn y.

**Bài tập 5.**

a. $x > 2$.

b. $x > \frac{1}{2}$.

**Bài tập 6.**

a. $x > \frac{1}{2}$.

b. $x > 2$.

c. $x > -\frac{1}{5}$.

d. $x < 1$.

**Bài tập 7.**

a. $x > 6$.

b. Mọi x.

c. $x < \frac{3}{2}$.

d. Trước tiên ta cần có $x \neq 2$.

Khi đó, điều kiện là: $0 < \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} = 2x \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy điều kiện để biểu thức dương là $0 < x \neq 2$.

**Bài tập 8.** Viết lại bất phương trình: $(m^2 - 4m + 3)x \geq m - 1$.

a. Với m = 0, bất phương trình có dạng: $3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy, với m = 0 bất phương trình có nghiệm $x \geq -\frac{1}{3}$.

b. Với m = 1, bất phương trình có dạng: $0x \geq 0$, luôn đúng.

Vậy, với m = 1 bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c. Với m = 3, bất phương trình có dạng: $0x \geq 2$, mâu thuẫn.

Vậy, với m = 3 bất phương trình vô nghiệm.

**Bài tập 9.** Với giá trị nào của m thì phương trình ẩn x:

a. Phương trình có nghiệm: $x = m + 7$

Khi đó, để nghiệm của phương trình lớn hơn 2 điều kiện là:

$m + 7 > 2 \Leftrightarrow m > -5$.

Vậy, với $m > -5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình có nghiệm: $x = m + \frac{11}{2}$.

Khi đó, để nghiệm của phương trình dương điều kiện là:

$m + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{2}$.

Vậy, với $m > -\frac{11}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình có nghiệm: $x = 2m + 3$.

Khi đó, để nghiệm của phương trình không nhỏ hơn 6 điều kiện là:

$2m + 3 \geq 6 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$. Vậy, với $m \geq \frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.




# BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG BẬC NHẤT

## I. PHƯƠNG PHÁP

Với những bất phương trình đưa được về dạng $ax + b \lesseqgtr 0$ thông qua các phép biến đổi đại số thông thường, phương pháp giải được minh hoạ bởi các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** Giải bất phương trình: $3(2x - 1) - (5x + 3) < - x$.

*Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$6x - 3 - 5x - 3 < - x$ → *Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc*

$\Leftrightarrow 6x - 5x + x < 3 + 3$ → *Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.*

$\Leftrightarrow 2x < 6$ → *Thu gọn, ta nhận được bất phương trình dạng ax = –b*

$\Leftrightarrow x < 3$. → *Sử dụng quy tắc chia để nhận được nghiệm của bất phương trình.*

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 3$.

**Thí dụ 2:** Giải bất phương trình: $\frac{x-1}{4} - 1 > 8 + \frac{x+1}{3}$.

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$\frac{3(x-1)-12}{12} > \frac{96+4(x+1)}{12}$ → *Quy đồng mẫu số hai vế.*

$\Leftrightarrow 3x - 15 > 100 + 4x$ → *Nhân hai vế với 12 để khử mẫu.*

$\Leftrightarrow -4x + 3x > 100 + 15$ → *Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang VT, các hằng số sang VP.*

$\Leftrightarrow -x > 115 \Leftrightarrow x < -115$. → *Thu gọn.*

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -115$.

**Nhận xét:** 1. Như vậy, để giải những bất phương trình đưa được về dạng $ax + b \lesseqgtr 0$ hoặc $ax \lesseqgtr -b$, ta thực hiện theo các bước:

*Bước 1*: Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu ... để biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng $ax + b \lesseqgtr 0$ hoặc $ax \lesseqgtr -b$.

*Bước 2.* Giải bất phương trình nhận được, từ đó kết luận.

2. Tuy nhiên, trong một số trường hợp chúng ta cần linh hoạt để nhận được những cách biến đổi đơn giản hơn, thí dụ:

$$\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{12}<0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2.$$

3. Quá trình biến đổi bất phương trình có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, bất phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x, thí dụ:

- Bất phương trình:
  $3x+1<3x-1 \Leftrightarrow 3x-3x<-1-1 \Leftrightarrow 0<-2$
  $\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.
- Bất phương trình: $x+2 \leq x+6 \Leftrightarrow x-x \leq 6-2 \Leftrightarrow 0 \leq 4$
  $\Rightarrow$ Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải bất phương trình: $11-3(x+1)>2(x-3)-5$.

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$11-3(x+1)>2(x-3)-5 \Leftrightarrow 11-3x-3>2x-6-5$$

$$\Leftrightarrow -3x-2x>-6-5-11+3 \Leftrightarrow -5x>-19 \Leftrightarrow x<\frac{19}{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x<\frac{19}{5}$.

**Ví dụ 2:** Giải bất phương trình: $3-\frac{x-3}{12}<x-\frac{x-3}{8}$.

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

*Cách 1*: Nhân hai vế của bất phương trình với 24, được:

$$72-2(x-3)<24x-3(x-3) \Leftrightarrow 72-2x+6<24x-3x+9$$

$$\Leftrightarrow -2x-24x+3x<9-72-6 \Leftrightarrow -23x<-69 \Leftrightarrow x>3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x>3$.

*Cách 2*: Biến đổi bất phương trình về dạng: $\frac{x-3}{8}-x+3-\frac{x-3}{12}<0$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\frac{1}{8}-1-\frac{1}{12})<0 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x>3$.

**Nhận xét:** Trong lời giải của cách 2, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung x − 3, điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.

**Ví dụ 3:** Cho biểu thức: $A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2}$.

Tìm các giá trị của x sao cho giá trị của A lớn hơn −1 nhưng nhỏ hơn 1. Biểu diễn trên trục số các giá trị tìm được của x.

*Giải*

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức A:

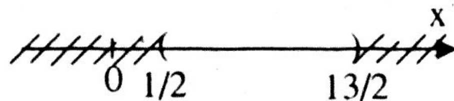
$$A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2} = \frac{x+1-3(x-2)}{6} = \frac{x+1-3x+6}{6} = \frac{7-2x}{6}.$$

- Để A > −1 điều kiện là:

$$\frac{7-2x}{6} > -1 \Leftrightarrow 7-2x > -6 \Leftrightarrow -2x > -6-7 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}.$$

- Để A < 1 điều kiện là: $\frac{7-2x}{6} < 1 \Leftrightarrow 7-2x < 6 \Leftrightarrow -2x < 6-7 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Vậy, để có được $-1 < A < 1$ điều kiện là $\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$ và ta có biểu diễn:




Cách biểu diễn trên trục được thực hiện như sau:

1. Xác định vị trí của các điểm $\frac{1}{2}$ và $\frac{13}{2}$.
2. Giữ nguyên đoạn thẳng từ điểm $\frac{1}{2}$ đến điểm $\frac{13}{2}$.
3. Gạch chéo phần còn lại, gạch cả điểm $\frac{1}{2}$ và $\frac{13}{2}$.

**Ví dụ 4:** Trong cuộc thi bắn súng, mỗi hạ thủ được bắn 10 phát. Mỗi lần trúng đích được 5 điểm, mỗi lần trượt bị trừ 1 điểm. Xạ thủ nào đạt được 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi xạ thủ phải bắn trúng đích bao nhiêu lần được thưởng ?

*Giải*

Gọi số lần bắn trúng đích là x, điều kiện $x \in N$, $0 \le x \le 10$. (*)

Vì:

- Mỗi hạ thủ được bắn 10 phát nên số lần bắn trượt là 10 − x, khi đó tổng số điểm đạt được là 5x − (10 − x).

- Muốn được thưởng, tổng số điểm phải đạt từ 30 điểm trở lên, do đó:

$$5x - (10 - x) \geq 30 \Leftrightarrow 5x - 10 + x \geq 30 \Leftrightarrow 6x \geq 40 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được:

$$x \in N, \frac{20}{3} \leq x \leq 10 \Rightarrow x = 7, x = 8, x = 9, x = 10.$$

Vậy, để nhận được thưởng thì số lần bắn trúng đích phải là 7 lần, hoặc 8 lần, hoặc 9 lần, hoặc 10 lần.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu các bước giải những bất phương trình đưa được về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $3x - 5 > 2x$.

b. $3x < 2x + 3$.

c. $2 + 2x < 2(x + 2)$.

d. $2x - 3 > 5 - (3 - 2x)$.

**Bài tập 2.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $5x - 2 < 2(x - 1) - (2 - 3x)$.

c. $(x - 2)^2 > x(x + 3)$.

b. $(x - 3)(x + 3) < x(x - 6)$.

d. $(x + 2)^2 \geq 2x(x + 2) + 4$.

**Bài tập 3.** Giải các bất phương trình:

a. $x^2 + 2(x - 3) - 1 > x(x + 5) + 5$.

b. $(x - 1)(x + 5) < (x - 3)(x + 5)$.

c. $(x + 2)(x + 4) < (x - 2)(x + 8) + 26$.

**Bài tập 4.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $\frac{x+2}{3} - \frac{x-2}{4} < 1$.

b. $\frac{2x-1}{4} + 2 < \frac{5x-1}{8}$.

c. $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-2}{2} < 3$.

d. $\frac{2x-7}{3} < \frac{4-3x}{9}$.

**Bài tập 5.** Giải các bất phương trình:

a. $2x - \frac{x+1}{3} + \frac{3x+2}{6} \geq \frac{x}{2} + 3$.

b. $\frac{x+4}{5} - x + 3 < \frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2}$.

**Bài tập 6.** Giải các bất phương trình:

a. $\frac{5x-1}{5} - \frac{3x+1}{2} > 0$.

b. $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x+4}{6} < 0$.

c. $\frac{1-x}{3} + \frac{2x-3}{12} < 0$.

**Bài tập 7.** Tìm các số tự nhiên n thoả mãn bất phương trình:

a. $3(4n - 5) < 2n + 27$.

b. $(n + 2)^2 - 40 < (n - 3)(n + 3)$.

**Bài tập 8.** Tìm các giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số:

a. $6x - 3 < 4x - 1$ và $5x + 1 > 3x - 3$.

b. $3x - 1 > x - 2$ và $4x - 1 > 2x - 3$.

**Bài tập 9.** Tìm giá trị của x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $A = \frac{5-2x}{x^2+4}$.

b. $B = \frac{2x-5}{6} + \frac{5x-2}{3}$.

c. $C = \frac{x+27}{5} - \frac{3x-7}{4}$.

**Bài tập 10.** Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{1-x^2}\right) : \frac{2x+1}{x^2-1}$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm các giá trị của x để $A > 0$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $x > 5$.

b. $x < 3$.

c. Mọi x.

d. $\varnothing$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 2.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $\varnothing$.

b. $x < \frac{3}{2}$.

c. $x < \frac{4}{7}$.

d. $x = 0$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 3.**

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$x^2 + 2x - 6 - 1 > x^2 + 5x + 5 \Leftrightarrow 3x < -12 \Leftrightarrow x < -4$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -4$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$(x + 5)(x - 1 - x + 3) < 0 \Leftrightarrow x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -5$.

c. Mọi x.

**Bài tập 4.** Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $x < -2$.  b. $x > 15$.  c. $x > -11$.  d. $x < \frac{25}{9}$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

**Bài tập 5.**

a. $x > \frac{9}{5}$.  b. $x > \frac{79}{19}$.

**Bài tập 6.**

a. $x < -\frac{7}{5}$.  b. Mọi x.  c. $x > \frac{1}{2}$.

**Bài tập 7.**

a. Biến đổi biểu thức về dạng: $10n < 42 \Leftrightarrow n < 4,2$

Suy ra, ta chọn được $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng: $4n < 25 \Leftrightarrow n < 6,25$

Suy ra, ta chọn được $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

**Bài tập 8.** Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

a. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$6x - 3 < 4x - 1 \Leftrightarrow x < 1$.

$5x + 1 > 3x - 3 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy, với $-2 < x < 1$ thoả mãn cả hai bất phương trình.

b. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$3x - 1 > x - 2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

$4x - 1 > 2x - 3 \Leftrightarrow x > -1$.

Vậy, với $x > -\frac{1}{2}$ thoả mãn cả hai bất phương trình.

**Bài tập 9.** Tìm giá trị của x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $x < \frac{5}{2}$.  b. $x > \frac{3}{4}$.  c. $x < 13$.

**Bài tập 10.** Để A có nghĩa điều kiện là $x \neq \pm 1$.

a. Ta có: $A = \frac{x - 1 - 2(x + 1) + x + 5}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x + 1} = \frac{2}{2x + 1}$.

b. Để $A > 0$, điều kiện là: $\frac{2}{2x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Vậy, để $A > 0$ điều kiện là $-\frac{1}{2} < x \neq 1$.

## CHỦ ĐỀ MỞ RỘNG 5 — BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ CHỮ

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải bất phương trình:

$ax - 8 < 0 \Leftrightarrow ax < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{a}$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < \frac{8}{a}$.

**Nhận xét:** Ta thấy ngay:

1. Với $a = 1$ thì nghiệm là $x < 8$, tức lời giải trên là đúng.
2. Với $a = 0$ thì $\frac{8}{a}$ không xác định do đó lời giải trên là sai.
3. Với $a = -2$ thì theo cách giải trên ta nghiệm là $x < -4$.
   Tuy nhiên, thực tế với $a = -2$ bất phương trình có dạng:
   $-2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > -4$.
   Tức lời giải trên là sai.

Như vậy, khi giải bất phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp nhỏ hơn 0, bằng 0 và lớn hơn 0 của hệ số của x, đó được gọi là "*Giải và biện luận bất phương trình theo tham số*".

### 2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**Bài toán:** Giải và biện luận phương trình

$ax + b < 0$.

**PHƯƠNG PHÁP CHUNG**

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $ax < -b$. (1)

Ta xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $a = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0$.

Vậy, ta được:

- Nếu $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Nếu $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2*: Nếu $a > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

*Trường hợp 3*: Nếu $a < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

Kết luận:

- Với $a = 0$ và $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = 0$ và $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $a > 0$, nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{b}{a}$.
- Với $a < 0$, nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{b}{a}$.

**Thí dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình: $mx + 1 \leq -m^2$.

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng: $mx \leq -m^2 - 1$. (1)

Xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1*: Với $m = 0$, ta được: $(1) \Leftrightarrow 0 \leq -1$, mâu thuẫn.

*Trường hợp 2*: Với $m > 0$, ta được: $(1) \Leftrightarrow x \leq -\frac{m^2+1}{m}$.

*Trường hợp 3*: Với $m < 0$, ta được: $(1) \Leftrightarrow x \geq -\frac{m^2+1}{m}$.

Kết luận: – Với $m = 0$, bất phương trình vô nghiệm.

– Với $m > 0$, bất phương trình có nghiệm là $x \leq -\frac{m^2+1}{m}$.

– Với $m < 0$, bất phương trình có nghiệm là $x \geq -\frac{m^2+1}{m}$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Giải và biện luận bất phương trình: $mx - 2 > x - 3m$.

*Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $(m - 1)x > 2 - 3m$. (1)

Xét ba trường hợp:

*Trường hợp 1*: Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$(1) \Leftrightarrow 0x > -1$ (luôn đúng), bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

*Trường hợp 2*: Với $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

$(1) \Leftrightarrow x > \frac{2-3m}{m-1}$, là nghiệm của bất phương trình.

*Trường hợp 3*: Với $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

$(1) \Leftrightarrow x < \frac{2-3m}{m-1}$, là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận: – Với $m = 1$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

– Với $m > 1$, bất phương trình có nghiệm là $x > \frac{2-3m}{m-1}$.

– Với $m < 1$, bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{2-3m}{m-1}$.

**Ví dụ 2:** Tìm m để bất phương trình: $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$ vô nghiệm .

*Giải.*

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0$. (1)

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 bất phương trình vô nghiệm:

**Ví dụ 3:** Xác định m sao cho hai bất phương trình sau tương đương

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

*Giải*

Viết lại các bất phương trình dưới dạng: $(m - 1)x > m - 3$ (1)

$(m + 1)x > m - 2$. (2)

Ta đi xét các trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu m = 1.

(1) $\Leftrightarrow 0x > -2$, luôn đúng.

(2) $\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

*Trường hợp 2*: Nếu m = −1.

(1) $\Leftrightarrow x < 2$.

(2) $\Leftrightarrow 0x > -3$, luôn đúng.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

*Trường hợp 3*: Nếu $m \neq \pm 1$.

Khi đó, (1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)(m + 1) > 0 \\ \dfrac{m - 3}{m - 1} = \dfrac{m - 2}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$

Vậy, với m = 5, hai bất phương trình tương đương với nhau.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình: $ax + b < 0$.

**Câu hỏi 2:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình: $ax + b \leq 0$.

**Câu hỏi 3:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình: $ax + b > 0$.

**Câu hỏi 4:** Hãy trình bày phương pháp giải và biện luận bất phương trình: $ax + b \geq 0$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Giải và biện luận các bất phương trình:

$$(m^2 + m + 1)x + 3m > (m^2 + 2)x + 5m - 1.$$

**Bài tập 2.** Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $x + \frac{x-1}{m+1} > \frac{x+1}{m+1} - mx$.

b. $x + \frac{x-1}{m} > \frac{x+1}{m} - (m+1)x$, với $m \neq 0$.

**Bài tập 3.** Giải và biện luận bất phương trình: $x + 1 > \frac{ax}{b} + \frac{b}{a}$, với a, b > 0.

## V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:** Biến đổi bất phương trình về dạng: $(m-1)x > 2m-1$.

- Với m = 1, ta được: $0 > -1$, luôn đúng.
- Với m > 1, ta được: $x > \frac{2m-1}{m-1}$.
- Với m < 0, ta được: $x < \frac{2m-1}{m-1}$.

**Bài tập 2:**

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m+1} - \frac{1}{m+1} > \frac{x}{m+1} + \frac{1}{m+1} - mx \Leftrightarrow (m+1)x > \frac{2}{m+1}.$$

- Với m = –1, bất phương trình vô nghiệm.
- Với m > –1, ta được: $x > \frac{2}{(m+1)^2}$.
- Với m < –1, ta được: $x < \frac{2}{(m+1)^2}$.

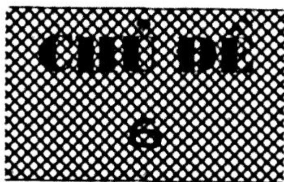
b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m} - \frac{1}{m} > \frac{x}{m} + \frac{1}{m} - (m+1)x \Leftrightarrow (m+2)x > \frac{2}{m}.$$

- Với m = –2, bất phương trình vô nghiệm.
- Với m > –2, ta được: $x > \frac{2}{m(m+2)}$.
- Với m < –2, ta được: $x < \frac{2}{m(m+2)}$.

**Bài tập 3:** Biến đổi bất phương trình về dạng: $a(a-b)x < b(a-b)$.

- Với a = b, bất phương trình vô nghiệm.
- Với a > b, ta được: $x < \frac{b}{a}$.
- Với a < b, ta được: $x > \frac{b}{a}$.




# PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. NHẮC LẠI VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Với số a, ta có: $|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \ge 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$.

Tương tự như vậy, với đa thức ta cũng có: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f(x) \ge 0 \\ -f(x) \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$.

**Thí dụ 1:** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

a. $A = |x - 4| + x - 3$ khi $x \ge 4$. b. $B = 2x + 3 - |1 - 2x|$ khi $x \ge \frac{1}{2}$.

b. $C = |x - 2| + |2x - 3| + 2x + 1$ khi $x > 2$.

c. $D = |x - 1| + 2x - 3$.

*Giải*

a. Với giả thiết $x \ge 4$, ta suy ra: $x - 4 \ge 0 \Rightarrow |x - 4| = x - 4$.
Do đó, A được viết lại: $A = x - 4 + x - 3 = 2x - 7$.

b. Với giả thiết $x \ge \frac{1}{2}$, ta suy ra: $1 - 2x \le 0 \Rightarrow |1 - 2x| = -(1 - 2x)$.
Do đó, B được viết lại: $B = 2x + 3 - [-(1 - 2x)] = 2x + 3 + 1 - 2x = 4$.

c. Với giả thiết $x > 2$, ta suy ra: $x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$.
$2x - 3 > 0 \Rightarrow |2x - 3| = 2x - 3$.
Do đó, C được viết lại: $C = x - 2 + 2x - 3 + 2x + 1 = 5x - 4$.

d. Ta đi xét hai trường hợp:
*Trường hợp 1*: Khi $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$, ta được: $D = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$.
*Trường hợp 2*: Khi $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, ta được: $D = -(x - 1) + 2x - 3 = x - 2$.
Tóm lại: $D = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \ge 1 \\ x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

**Nhận xét:** Xuất phát từ nội dung trong thí dụ trên, người ta có thể phát triển thành yêu cầu giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, cụ thể:

a. Tìm các nghiệm $x \ge 4$ của phương trình:
$$|x - 4| + x - 3 = 0.$$

b. Tìm các nghiệm $x \ge \frac{1}{2}$ của phương trình:
$$2x + 3 = |1 - 2x|.$$

c. Tìm các nghiệm x > 2 của phương trình:

$$|x - 2| + |2x - 3| + 2x + 1 = 0.$$

d. Giải phương trình:

$$|x - 1| + 2x - 3 = 0.$$

## 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trong phạm vi kiến thức lớp 8 chúng ta sẽ chỉ quan tâm tới ba dạng phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, bao gồm:

*Dạng 1*: Phương trình: $|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

*Dạng 2*: Phương trình: $|f(x)| = |g(x)|$.

*Dạng 3*: Phương trình: $|f(x)| = g(x)$.

Để tiện tiếp cận với kiến thức cho từng dạng phương trình, tài liệu này sẽ trình bày theo kiểu thứ tự.

**Bài toán 1:** Giải phương trình : $|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

*Phương pháp giải*

Thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện để f(x) xác định (nếu cần).

*Bước 2:* Khi đó: $|f(x)| = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = k \\ f(x) = -k \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

*Bước 3:* Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 2:** Giải các phương trình sau:

a. $|2x - 3| = 1$.

b. $\left|\dfrac{x+1}{x}\right| - 2 = 0$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình: $|2x - 3| = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 1 + 3 \\ 2x = -1 + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 2 và x = 1.

b. Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0$.

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x} = 2 \\ \dfrac{x+1}{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 2x \\ x + 1 = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2x = -1 \\ x + 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 1 và $x = -\dfrac{1}{3}$.

**Bài toán 2:** Giải phương trình : $|f(x)| = |g(x)|$.

*Phương pháp giải*

Thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần).

*Bước 2:* Khi đó: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

*Bước 3:* Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 3:** Giải các phương trình sau:

a. $|2x + 3| = |x - 3|$.

b. $\left|\dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}\right| - |x| = 0$.

*Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình: $|2x + 3| = |x - 3|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = x - 3 \\ 2x + 3 = -(x - 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x = -3 - 3 \\ 2x + x = 3 - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -6$ và $x = 0$.

b. Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0$.

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x^2 - x + 2}{x + 1}\right| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1} = x \\ \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1} = -x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 2 = x(x + 1) \\ x^2 - x + 2 = -x(x + 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2 \\ 2x^2 = -2, \text{vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

**Bài toán 3:** Giải phương trình : $|f(x)| = g(x)$.

*Phương pháp giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: (*Phá dấu trị tuyệt đối*) Thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần).

*Bước 2:* Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $f(x) \geq 0$. (1)

Phương trình có dạng: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ nghiệm x và kiểm tra điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $f(x) < 0$. (2)

Phương trình có dạng: $-f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$ nghiệm x và kiểm tra điều kiện (2).

*Bước 3:* Kết luận nghiệm cho phương trình.

*Cách 2*: Thực hiện theo các bước:

*Bước 1:* Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần) và $g(x) \geq 0$.

*Bước 2:* Khi đó: $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

*Bước 3:* Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

**Thí dụ 4:** Giải phương trình: $|x + 4| + 3x = 5$.

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-(x + 4) + 3x = 5 \Leftrightarrow 2x = 9$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$, không thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

*Cách 2*: Viết lại phương trình dưới dạng: $|x + 4| = 5 - 3x$.

Với điều kiện: $5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi: $|x + 4| = 5 - 3x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 5 - 3x \\ x + 4 = -(5 - 3x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{9}{2} \text{ không thoả mãn (*)} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

**Chú ý:** Qua thí dụ trên, đối với các em học sinh hẳn thấy rằng " *Cả hai cách giải được trình bày đều có độ phức tạp như nhau* ". Chính vì vậy, tại đây đặt ra một câu hỏi " *Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại ?* " - Câu trả lời các em sẽ nhận được trong phần *các ví dụ minh hoạ.*

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

a. $A = |x - 2| + 3x - 2$ khi $x > 2$.

b. $B = |x - 3| + |3 - 2x| + x + 8$ khi $x > 3$.

*Giải*

a. Với giả thiết $x > 2$, ta suy ra: $x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$.

Do đó, A được viết lại: $A = x - 2 + 3x - 2 = 4x - 4$.

b. Với giả thiết $x > 3$, ta suy ra: $x - 3 > 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$.

$3 - 2x < 0 \Rightarrow |3 - 2x| = -(3 - 2x)$.

Do đó, B được viết lại:

$B = x - 3 - (3 - 2x) + x + 8 = x - 3 - 3 + 2x + x + 8 = 3x + 2$.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $|2x - 3m| = |x + 6|$, với m là tham số.

*Giải*

Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x - 3m| = |x + 6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3m = x + 6 \\ 2x - 3m = -(x + 6) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x = 6 + 3m \\ 2x + x = -6 + 3m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 + 3m \\ x = m - 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 6 + 3m$ và $x = m - 2$.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình: $\left|\dfrac{x + 2}{x - 2}\right| = 1$.

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 2$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

*Cách 1*: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x + 2}{x - 2} = 1 \\ \dfrac{x + 2}{x - 2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = x - 2 \\ x + 2 = -(x - 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

*Cách 2*: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 1 \Leftrightarrow |x+2| = |x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = x-2 \\ x+2 = -(x-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

**Ví dụ 4:** Giải phương trình: $|x-2| + 3x = 4$.

*Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x - 2 + 3x = 4 \Leftrightarrow 4x = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, không thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $-(x-2) + 3x = 4 \Leftrightarrow 2x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$, thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

*Cách 2*: Viết lại phương trình dưới dạng: $|x-2| = 4 - 3x$.

Với điều kiện: $4 - 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{4}{3}$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi: $|x-2| = 4 - 3x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 = 4-3x \\ x-2 = -(4-3x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \text{ không thoả mãn (*)} \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

**Chú ý:** Ví dụ tiếp theo sẽ trả lời câu hỏi "*Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại ?*".

**Ví dụ 5:** Giải các phương trình:

a. $|x+1| = x^2 + x$.

b. $|x^2 - 2x| + 4 = 2x$.

*Giải*

a. Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x + 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$, thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-(x + 1) = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$, không thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $|x^2 - 2x| = 2x - 4$.

Với điều kiện: $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi: $|x^2 - 2x| = 2x - 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 2x - 4 \\ x^2 - 2x = -(2x - 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x - 2)^2 = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \text{ không thoả mãn (*)} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

**Nhận xét:**

1. Trong câu a), chúng ta đã lựa chọn cách 1 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 2 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2 + x \geq 0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc " *Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại* ", cụ thể:

   Với điều kiện: $x^2 + x \geq 0$. (*)

   Khi đó, phương trình được biến đổi: $|x + 1| = x^2 + x$

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = x^2 + x \\ x + 1 = -(x^2 + x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

   Thử lại:

   - Với $x = 1$ ta được $x^2 + x = 1^2 + 1 = 2 \geq 0$ luôn đúng.
   - Với $x = -1$ ta được $x^2 + x = (-1)^2 - 1 = 0 \geq 0$ luôn đúng.

   Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

2. Trong câu b), chúng ta đã lựa chọn cách 2 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 1 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2 - 2x \geq 0$ và $x^2 - 2x < 0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc " *Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại* " - Đề nghị bạn đọc tự làm.

3. Một câu hỏi sẽ được đặt ra tại đây là "*Với một phương trình có dạng đặc biệt hơn một chút (thí dụ $2|x - 1| = x^2 - 2x - 2$) thì ngoài việc lựa chọn một trong hai cách giải đã biết thì còn có một phương pháp giải khác không ?*" - Câu trả lời "*Đương nhiên sẽ có*". Ví dụ sau sẽ minh hoạ phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình này.

**Ví dụ 6:** Giải phương trình: $2|x - 1| = x^2 - 2x - 2$.

*Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 - 2x + 1) - 2|x - 1| - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = |x - 1|$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t(t + 1) - 3(t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \underset{t+1\geq 1}{\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}} t = 3$.

Với $t = 3$, ta được: $\Leftrightarrow |x - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ x - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = 4$ hoặc $x = -2$.

**Chú ý:** Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng một ví dụ để minh hoạ phương pháp giải phương trình chứa nhiều hơn 1 dấu giá trị tuyệt đối.

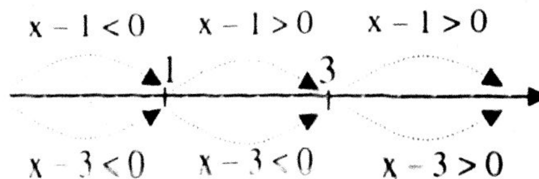
**Ví dụ 7:** Giải phương trình: $|x - 1| + |x - 3| = 2$.

*Giải*

Nhận xét rằng:

$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$,

$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$,




do đó, để thực hiện việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối cho phương trình chúng ta cần phải xét ba trường hợp.

*Trường hợp 1*: Nếu $x \leq 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $-(x - 1) - (x - 3) = 2 \Leftrightarrow -2x + 4 = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$, thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $1 < x < 3$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1) - (x - 3) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$, luôn đúng.

*Trường hợp 3*: Nếu $x \geq 3$. (3)

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1) + (x - 3) = 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2$

$\Leftrightarrow x = 3$, thoả mãn điều kiện (3).

Vậy, phương trình có nghiệm $1 \leq x \leq 3$.

**Chú ý:** Qua kết quả của phương trình trên, chúng ta nhận thấy một điều rất thú vị là nghiệm của phương trình có thể là một đoạn trên trục số.

**Ví dụ 8:** Giải phương trình: $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2.$ (1)

*Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq -1$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Đặt $t = \frac{|x+1|}{3}$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|}{3} = 1 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm x = 2 và x = –4.

*Cách 2*: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \geq 2.\sqrt{\frac{3}{|x+1|}.\frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm x = 2 và x = –4.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình:

$|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

**Câu hỏi 2:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình: $|f(x)| = |g(x)|$.

**Câu hỏi 3:** Hãy trình bày phương pháp giải bất phương trình: $|f(x)| = g(x)$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

a. $A = |x-3| + x - 2$ trong hai trường hợp $x \geq 3$ và $x < 3$.

b. $B = 2x + 3 - |-2x|$ trong hai trường hợp $x \geq 1$ và $x < 0$.

c. $C = |x-4| - 3x + 11$ trong hai trường hợp $x \geq 5$ và $x < 3$.

d. $D = |x-1| + |x-2| + |2x-5|$ trong hai trường hợp $x > 4$ và $x < -1$.

**Bài tập 2.** Giải các phương trình:

a. $|x - 4| = 5$.  b. $|2x - 3| = 4$.

c. $|3 - 2x| = 7$.  d. $|1 - 5x| - 1 = 3$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình:

a. $|2x - 3| + 2 = 8$.  b. $|4x + 3| + 1 = 0$.

c. $4|2x - 1| + 3 = 15$.  d. $3|x - 1| - 3 = 5$.

**Bài tập 4.** Giải các phương trình:

a. $|x - 3| = |2x|$.  b. $|2x - 1| = |x - 1|$.

c. $|3x - 1| = |x - 2|$.  c. $|5x - 4| = |4 - 3x|$.

**Bài tập 5.** Giải các phương trình:

a. $\left|\frac{x-1}{x}\right| = 2$.  b. $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| - 1 = 0$.

**Bài tập 6.** Giải các phương trình:

a. $|x - 2| = 18 - 3x$.  b. $|x + 3| = 2x - 1$.

c. $|5x - 3| = x + 7$.  d. $|5 - 2x| + x = 1$.

**Bài tập 7.** Giải các phương trình sau với m là tham số:

a. $|x - 2m| = |3x + 4|$.  b. $|3x + 2| = |x - 2m|$.

**Bài tập 8.** * Giải các phương trình:

a. $|x - 1| = x^2 - x$.  b. $|x - 1| = x^3 + x + 1$.

c. $|4x^2 - 2x| + 1 = 2x$.  d. $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$.

**Bài tập 9.** * Giải các phương trình sau với m là tham số:

a. $|mx + 1| = |x + 1|$.  b. $|(m + 2)x - 3| = |mx - 4|$.

**Bài tập 10.** Giải và biện luận phương trình:

a. $|mx + 1| = |2x + m - 3|$.

b. $|x - 1| = mx + 2m - 1$.  b. $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

**Bài tập 11.** * Giải các phương trình:

a. $|x - 2| + |x - 4| = 2$.  b. $|x - 1| + |2x - 6| = 7$.

c. $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6$.  d. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

### Bài tập 1.

a. Ta có: $A = \begin{cases} 2x - 5 & \text{khi } x \geq 3 \\ 1 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$.  b. Ta có: $B = \begin{cases} 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

c. Ta có: $C = \begin{cases} -2x + 7 & \text{khi } x \geq 5 \\ -4x + 15 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$.  d. Ta có: $D = \begin{cases} 4x - 8 & \text{khi } x > 4 \\ -4x - 8 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

**Bài tập 2.**

a. $x = 9, x = -1$.  b. $x = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2}$.

b. $x = 5, x = -2$.  d. $x = 1, x = -\frac{3}{5}$.

**Bài tập 3.**

a. $x = \frac{9}{2}, x = -\frac{3}{2}$.  b. Vô nghiệm.

c. $x = 2, x = -1$.  d. $x = \frac{11}{3}, x = -\frac{5}{3}$.

**Bài tập 4.**

a. $x = -3, x = 1$.  b. $x = 0, x = \frac{2}{3}$.

c. $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}$.  d. $x = 1, x = 0$.

**Bài tập 5.**

a. $x = -1, x = \frac{1}{3}$.  b. $x = 0, x = \frac{2}{3}$.

**Bài tập 6.** Giải các phương trình:

a. $x = 5$.  b. $x = 4$.  c. $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{2}{3}$.  d. $x = 3$.

**Bài tập 7.** Giải các phương trình sau với m là tham số:

a. $x = m - 2, x = \frac{1}{2}(m - 2)$.  b. $x = -m - 1, x = \frac{1}{2}(m - 1)$.

**Bài tập 8.**

a. Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $-x + 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$\Rightarrow x = -1$, thoả mãn điều kiện (2). Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

b. Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1*: Nếu $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x - 1 = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 = -2$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$, không thoả mãn điều kiện (1).

*Trường hợp 2*: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $-x + 1 = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$, thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $|4x^2 - 2x| = 2x - 1$.

Với điều kiện: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi: $|4x^2 - 2x| = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 2x = 2x - 1 \\ 4x^2 - 2x = -(2x - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 4x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x - 1)^2 = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.




# BẤT ĐẲNG THỨC

## MỞ ĐẦU

### 1. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng: $A > B$, $A \geq B$

$A < B$, $A \leq B$.

### 2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Với a, b, c, d là các số thực, ta luôn có:

*Tính chất 1:* Nếu $a > b \Leftrightarrow b < a$.

*Tính chất 2:* Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

*Tính chất 3:* Nếu $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

*Tính chất :* Nếu $a > b$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right. \text{ và } \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right. .$$

*Tính chất 5:* Nếu $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$.

*Chú ý quan trọng*: không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

*Tính chất 6:* Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$.

*Tính chất 7:* Nếu $a > b$ thì: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{array}\right.$.

*Tính chất 8:* Nếu $a > b$ thì $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, với $n \in N^*$.

*Tính chất 9:* Nếu $a > b \geq 0$ thì $a^n > b^n$, với $n \in N^*$.

*Tính chất 10:* Nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, với $n \in N^*$.

## Bài toán 1 — CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

## I. PHƯƠNG PHÁP

**Bài toán:** Chứng minh bất đẳng thức: $A > B$.

### PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

*Phương pháp 1:* *Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa.* Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

*Hướng 1:* Chứng minh $A - B > 0$.

*Hướng 2:* Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.

*Hướng 3:* Xuất phát từ bất đẳng thức đúng.

*Hướng 4:* Biến đổi vế trái hoặc vế phải.

*Phương pháp 2:* *Sử dụng tính chất bắc cầu*, tức là chứng minh: $A > C$ và $C > B$.

*Phương pháp 3:* *Phương pháp chứng minh phản chứng*, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

*Phương pháp 4:* *Phương pháp hình học*, bằng việc sử dụng tính chất:
" *Nếu a, b, c là độ ba cạnh của một tam giác thì* $a + b > c$ *và* $|a - b| < c$ ".

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

*Giải*

Ta có ba cách trình bày theo phương pháp 1 (mang tính minh hoạ), như sau:

*Cách 1*: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau: $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}) + (\frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2}) + (\frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}})^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

*Cách 2*: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, luôn đúng.

*Cách 3*: Ta luôn có:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ca \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Cộng theo vế các bất phương trình trong hệ (I), ta được:

$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đpcm.

**Nhận xét:** Như vậy, thông qua ví dụ trên đã minh hoạ cho các em học sinh thấy được ba hướng chứng minh bất đẳng thức khi sử dụng phương pháp 1 và sau đây ta sẽ minh hoạ bằng một ví dụ cho hướng 4.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$ luôn có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} < 1$.

*Giải*

Nhận xét rằng: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

do đó: $VT = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, đpcm.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng với mọi $a, b \in R$ luôn có:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

*Giải*

Ta đi chứng minh với mọi x, y luôn có: $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{x^4+y^4}{2}$. $\quad (*)$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow (x + y)(x^3 + y^3) \leq 2(x^4 + y^4)$

$$\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) \le x^4 + y^4 \Leftrightarrow (x-y)^2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Khi đó áp dụng (*), ta được:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}.\frac{a^3+b^3}{2} = \left[\frac{a+b}{2}.\frac{a^3+b^3}{2}\right].\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\le \frac{a^4+b^4}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}, \text{ đpcm.}$$

**Ví dụ 4:** Cho a, b, c $\in$ (0, 1), chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$, $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

*Giải*

Giả sử trái lại cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó nhân theo vế ba bất đẳng thức ta được:

$$a(1-b).b(1-c).c(1-a) > \frac{1}{64} \Leftrightarrow a(1-a).b(1-b).c(1-c) > \frac{1}{64}. \quad (*)$$

Ta có nhận xét: $a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - (a + \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$,

Chứng minh tương tự, ta có: $b(1-b) \le \frac{1}{4}$, $c(1-c) \le \frac{1}{4}$,

do đó: $a(1-a).b(1-b).c(1-c) \le \frac{1}{64}$ tức là (*) sai.

**Ví dụ 5:** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với a là cạnh huyền. Chứng minh rằng: $a^3 > b^3 + c^3$.

*Giải*

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với a là cạnh huyền nên a > b và a > c.

Theo định lý Pitago, ta có: $a^2 = b^2 + c^2$.

Ta có nhận xét: $a^3 = a^2.a = (b^2 + c^2).a = b^2.a + c^2.a \underset{a>c}{\overset{a>b}{>}} b^2.b + c^2.c = b^3 + c^3$, đpcm.

**Chú ý:** Ở đây, ta còn có kết quả tổng quát hơn:

" *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với a là cạnh huyền ta luôn có:* $a^n \ge b^n + c^n$, *với* $n \in N$ *và* $n \ge 2$ "

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Trình các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Xác định tính đúng, sai của các bất đẳng thức sau và nêu lời giải thích:

a. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$, với $a, b, c \in \mathbf{R}$.

b. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b + c + d)$, với $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

c. $a^4 + b^4 < ab(a^2 + b^2)$, với $a, b \in \mathbf{R}$.

d. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$, với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

**Bài tập 2.** Với $0 \leq x, y, z \leq 1$, chứng minh rằng:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

**Bài tập 3.** Cho ba số $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

## V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:**

a. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c bởi:

bđt $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c, d bởi:

bđt $\Leftrightarrow (\frac{a}{2} - b)^2 + (\frac{a}{2} - c)^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 \geq 0$, luôn đúng.

c. Bất đẳng thức là sai bởi với $a = b = 0$, ta được $0 < 0$.

d. Bất đẳng thức là đúng bởi: $\begin{cases} |a - b| < c \\ |b - c| < a \\ |c - a| < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)^2 < c^2 \\ (b - c)^2 < a^2 \\ (c - a^2 < b^2 \end{cases}$,

cộng theo vế ta được đpcm.

## Bài toán 2 BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ ỨNG DỤNG

# I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

## 1. ĐỊNH NGHĨA

Giá trị tuyệt đối của số thực a là: $|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$

## 2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

*Tính chất 1:* Với mọi số thực a ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$

*Tính chất 2:* Với hai số thực a, b tuỳ ý: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$.

*Tính chất 3:* Ta có: $-b \leq a \leq b \Leftrightarrow |a| < b$.

*Tính chất 4:* Ta có: $\begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \end{cases} \Leftrightarrow a \geq |b|$.

*Tính chất 5:* Ta có: $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

# II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bài toán liên quan tới bất đẳng thức chứa dấu giái trị tuyệt đối thường được sử dụng cho các dạng toán:

*Dạng 1:* Chứng minh bất đẳng thức.

*Dạng 2:* Giải phương trình.

## 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta luôn có: $|a \pm b| \geq |a| - |b|$.

*Giải*

Ta có: $|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|$.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

*Giải*

Ta có: $a - c = (a - b) + (b - c)$. Kết quả suy ra từ tính chất 5.

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng nếu: $|a| + |b| = a + b$, (1)

thì $a, b \geq 0$.

*Giải*

Vế trái không âm, vậy vế phải không âm, tức là $a + b \geq 0$.

Suy ra, trong hai số a, b phải có một số không âm, giả sử $a \geq 0$ suy ra: $|a| = a$.

Từ đó (1) có dạng: $|b| = b \Leftrightarrow b \geq 0$.

## 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Với phương trình ta sử dụng các tính chất:

*Tính chất 1.* Nếu : $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

*Tính chất 2.* Nếu: $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

*Tính chất 3.* Nếu: $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

*Tính chất 4.* Nếu: $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$.

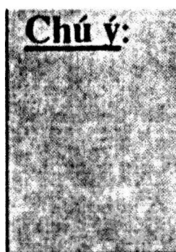
**Ví dụ 1:** Giải phương trình: $|2x + 3| + |1 - 2x| = 4$.

*Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng: $|2x + 3| + |1 - 2x| = (2x + 3) + (1 - 2x)$.

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 1}} \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.


**Chú ý:** Các phương trình được giải bằng phương pháp *sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối* ở dạng ban đầu thường không thấy xuất hiện dấu trị tuyệt đối, nó thường xuất hiện sau phép biến đổi: $\sqrt{A^2} = |A|$.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$. (1)

*Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x + 1)^2} - \sqrt{(x - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x + 1| - |x - 1| = |(x + 1) - (x - 1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 4}} (x - 1).[(x + 1) - (x - 1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1).2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x \geq 1$.

# III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu định nghĩa giá trị tuyệt đối của số thực a.

**Câu hỏi 2:** Nêu các tính chất cơ bản của bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối.

**Câu hỏi 3:** Nêu các bất đẳng thức mở rộng được sử dụng để giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Biết rằng $|a| > 2|b|$. Chứng minh rằng: $|a| < 2|a - b|$.

**Bài tập 2.** Biết với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a. $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a}\right| < 1$.

b. $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}$.

**Bài tập 3.** Giải các phương trình sau:

a. $|x + 3| + |1 - x| = 4$.

b. $|3x - 1| + |2 - 3x| = 3$.

**Bài tập 4.** Giải các phương trình sau:

a. $|2x - 3| + |2x - 9| = 6$.

b. $|4x - 1| + 2|2x - 1| = 1$.

# Bài toán 3 BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta phát biểu bất đẳng thức:

**Bất đẳng thức Côsi:** Cho hai số không âm a, b, ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

***Mở rộng***

a. Với các số a, b, c không âm, ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$,

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

b. Với n số $a_i$, $i = \overline{1,n}$ không âm, ta luôn có:

$$\frac{1}{n}(\underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_n}_{\text{n số hạng}}) \ge \sqrt[n]{\underbrace{a_1.a_2....a_n}_{\text{n số hạng}}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Côsi thường được sử dụng cho các dạng toán:

*Dạng 3:* Chứng minh bất đẳng thức.

*Dạng 4:* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

*Dạng 5:* Giải phương trình.

## I. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$.

*Giải*

Sử dụng bất đẳng thức Côsi:

- Cho cặp số a, b, ta được: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. (1)
- Cho cặp số $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$. (2)

Nhân hai vế tương ứng của (1), (2), ta được:

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}} = 4, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b$.

**Nhận xét:** Chúng ta có được kết quả tổng quát hơn như sau:

Cho n số dương $a_i$, $i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

Thật vậy, ta có: $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}.$$

Nhân hai vế tương ứng, ta được bất đẳng thức cần chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

**Ví dụ 2:** Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

*Giải*

Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right) - 3$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để nhận được các phần tử không âm trong bất đẳng thức, từ đó mới có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 3:** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\ge 0.$$

*Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\dfrac{a+b-2c}{c}+\dfrac{b+c-2a}{a}+\dfrac{c+a-2b}{b}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\ge 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\ge 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}}=6\text{, đpcm.}$$

dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow a=b=c.$

**Chú ý:** Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng liên tiếp nhiều lần bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 4:** Cho a, b > 0, $m\in N^*$. Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m\ge 2^{m+1}$

*Giải*

- Ta có: $1+\dfrac{a}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m}$,

$$1+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}}\Leftrightarrow\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m},$$

suy ra: $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m}+2^m\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^m}$

$$\ge 2.\sqrt{2^m.\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.2^m.\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}}=2^{m+1},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} 1 = \dfrac{a}{b} \\ 1 = \dfrac{b}{a} \\ \left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^m = \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m \end{cases} \Leftrightarrow a = b.$

**Chú ý**: Với các bất đẳng thức có điều kiện cần khéo léo biến đổi để tận dụng được điều kiện của giả thiết.

## 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

**Ví dụ 1:** Cho hai số a, b $\geq 0$.

a. Nếu $a + b = k$ – const, tính giá trị lớn nhất của ab.

b. Nếu $ab = k$ – const, tính giá trị nhỏ nhất của $a + b$.

*Giải*

a. Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{k^2}{4}$,

từ đó suy ra $(ab)_{Max} = \dfrac{k^2}{4}$, đạt được khi $a = b = \dfrac{k}{2}$.

**Nhận xét**: Qua ví dụ trên chúng ta thấy rằng:

1. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.
2. Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông là hình có chu vi nhỏ nhất.

b. Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{k}$,

từ đó suy ra $(a + b)_{Min} = 2\sqrt{k}$, đạt được khi $a = b = \dfrac{k}{2}$.

**Ví dụ 2:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{15}{x}$, với $x > 0$.

*Giải*

Với $x > 0$, ta được $\dfrac{x}{3}, \dfrac{15}{x} > 0$

Sử dụng bất đẳng thức Cosi ta được: $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{12}{x} \geq 2.\sqrt{\dfrac{x}{3}.\dfrac{12}{x}} = 4$,

từ đó suy ra $y_{Min} = 4$, đạt được khi: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{12}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 6$.

**Chú ý:** Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị nhỏ nhất của một tổng có tích bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tích bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = 2x + \frac{1}{x^2}$, với $x > 0$, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x.x.\frac{1}{x^2}} = 3.$$

2. Trong trường hợp là tổng luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

**Ví dụ 3:** Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^3 + \frac{3}{x^2}$, với $x > 0$.

*Giải:*

Biến đổi: $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}}$,

từ đó, suy ra $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}}$, đạt được khi

$\frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}$.

**Ví dụ 4:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = (x + 2)(3 - x)$, với $-2 \leq x \leq 3$.

*Giải*

Với $-2 \leq x \leq 3$, ta được: $x + 2 \geq 0$ và $3 - x \geq 0$,

do đó sử dụng bất đẳng thức Cosi ta được:

$$y = (x + 2)(3 - x) \leq \left[\frac{(x+2)+(3-x)}{2}\right]^2 = \frac{25}{4},$$

từ đó suy ra $y_{Max} = \frac{25}{4}$, đạt được khi: $x + 2 = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

**Chú ý:** Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất của một tích có tổng bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tổng bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = (2x + 1)(2 - 3x)$, vói $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (2x + 1)(2 - 3x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}).\frac{1}{3}(\frac{2}{3} - x)$$

$$= \frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - x) \le \frac{1}{6}\left[\frac{(x + \frac{1}{2}) + (\frac{2}{3} - x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{12}\right)^2$$

**2.** Trong trường hợp là tích luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

**Ví dụ 5:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = x(1 - x)^3$, với $0 \le x \le 1$.

*Giải*

Biến đổi: $y = x(1 - x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1 - x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1 - x)(1 - x)(1 - x)$,

rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm 3x và 3 số $1 - x$,

ta được: $y \le \frac{1}{3}.\left[\frac{3x + (1 - x) + (1 - x) + (1 - x)}{4}\right]^4 = \frac{1}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4}$,

dấu đẳng thức xảy ra khi: $3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

### 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** Giải phương trình: $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2$. (1)

*Giải*

Điều kiện $x \ne -1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \ge 2.\sqrt{\frac{3}{|x+1|}.\frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 3 \\ x + 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = -4$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm a và b.

**Câu hỏi 2:** Nêu các ứng dụng của bất đẳng thức Côsi.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** *Chứng tỏ rằng trong mọi tam giác, ta đều có: $S \le \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

trong đó S là diện tích tam giác, 2p là chu vi tam giác.

**Bài tập 2.** *Chứng minh rằng: $4\sqrt[4]{(a+1)(b+4)(c-2)(d-3)} \le a + b + c + d$,

với $a \ge -1$, $b \ge -4$, $c \ge 2$ và $d > 3$

**Bài tập 3.** *Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, với $x, y > 0$.

**Bài tập 4.** *Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}) \le ab$, với $a, b \ge 1$.

**Bài tập 5.** *Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1,$$

với $0 \le a, b, c \le 1$.

**Bài tập 6.** *Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z},$$

với $x, y, z \ge 0$ và $x, y, z \le 3$.

**Bài tập 7.** *Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^5} + \dfrac{b^2}{c^5} + \dfrac{c^2}{d^5} + \dfrac{d^2}{a^5} \ge \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + \dfrac{1}{d^3}$,

với $a, b, c, d > 0$.

**Bài tập 8.** *Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2+bc} + \dfrac{1}{b^2+ac} + \dfrac{1}{c^2+ab} \le \dfrac{a+b+c}{2abc}$,

với $a, b, c > 0$.

**Bài tập 9.** *Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} \le \frac{1}{abc},$$

với $a, b, c > 0$.

**Bài tập 10.** *Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} > \dfrac{18}{xyz+2}$,

với $x, y, z > 0$ có $x + y + z = 1$.

**Bài tập 11.**

1. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 4, hãy chỉ ra hình có diện tích lớn nhất.

2. Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 3, hãy chỉ ra hình có chu vi nhỏ nhất.

**Bài tập 12.** *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = (x + 3)(7 - x)$, với $-3 \le x \le 7$.

**Bài tập 13.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$, với $x > 0$.

**Bài tập 14.** *Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2 + \frac{2}{x^3}$, với $x > 0$.

**Bài tập 15.** *Tìm giác trị lớn nhất của hàm số: $y = x^3(2 - x)^5$, với $0 \le x \le 2$.

## V. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1:** Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, thế thì : $a + b + c = 2p$ và nhớ rằng $p - a$, $p - b$, $p - c$ là ba số dương.

Theo công thức Hêrông

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p.\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi : $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác đều.

**Bài tập 12:** $y_{Max} = 25$, đạt được khi $x = 2$.

**Bài tập 13:** $y_{Min} = 6$, đạt được khi $x = 6$.

**Bài tập 14:** $y_{Min} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$, đạt được khi $x = \sqrt[5]{3}$.

**Bài tập 15:** $y_{Max} = \frac{3^3.5^5}{4^8}$, đạt được khi $x = \frac{3}{4}$.

## Bài toán 4 — BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

**Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:** Cho $a_1, a_2, b_1, b_2$ là những số thực, ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

***Mở rộng***: Với các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki thường được sử dụng cho các dạng toán:

*Dạng 1:* Chứng minh bất đẳng thức.

*Dạng 2:* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức.

*Dạng 3:* Giải phương trình.

### 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng với mọi số thực x, y luôn có:

$$(x^3 + y^3)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

*Giải*

Ta có: $VT = (x^3 + y^3)^2 = (x.x^2 + y.y^2)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$, đpcm.

**Ví dụ 2:** Chứng minh rằng với a, b, c tuỳ ý, ta luôn có: $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$.

*Giải*

Ta có: $VT^2 = (ab + bc + ca)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta đi đến:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge |ab + bc + ca| \ge ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

**Ví dụ 3:** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là một nửa chu vi. Chứng minh rằng: $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$.

*Giải*

- Ta có: $(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2 = (1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c})^2$

$$\le (1^2 + 1^2 + 1^2)(p - a + p - b + p - c) = 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$

- Ta đi chứng minh : $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể: $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

$$\Leftrightarrow p < p - a + p - b + p - c +$$

$$+ 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

**Ví dụ 4:** Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

*Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)(1^2+1^2+1^2)\ge\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)^2$$

Suy ra: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).$ (*)

Nhận xét rằng: $\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\ge\sqrt[3]{\left|\frac{abc}{abc}\right|}=1,$

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},$$

suy ra: $\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

từ đó (*) được biến đổi: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

**Chú ý:** Với các bài toán có điều kiện ta cần khéo léo biến đổi để nhận được biểu thức điều kiện hoặc sử dụng ngay biểu thức điều kiện để biến đổi. Cụ thể ta đi xem xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 5:** Hai số x, y thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng: $-5 \le 3x + 4y \le 5$.

*Giải*

Ta có: $(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25$.

Lấy căn hai vế, ta được: $|3x + 4y| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3x + 4y \le 5$, đpcm.

**Ví dụ 6:** Cho các số không âm x, y thoả mãn $x^3 + y^3 = 2$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 2$.

*Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(x^2+y^2)^2=\left(\sqrt{x}.\sqrt{x^3}+\sqrt{y}.\sqrt{y^3}\right)^2\le(x+y)(x^3+y^3)=2(x+y)$$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^4 \le 4(x + y)^2 = 4(1.x + 1.y)^2 \le 4(1 + 1)(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 \le 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 2$, đpcm.

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

## 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

**Ví dụ 1:** Trong tất cả các nghiệm (x, y) của phương trình: $2x + 3y = 1$ (*) hãy chỉ ra nghiệm có tổng $3x^2 + 2y^2$ có nghiệm nhỏ nhất.

*Giải*

Ta có: $1 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}.x + \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{2}}.y + \sqrt{2}\right)^2$

$$\le \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right)(3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6}(3x^2 + 2y^2) \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 \ge \frac{6}{35}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ta có:

$$x\sqrt{3} : \frac{2}{\sqrt{3}} = y\sqrt{2} : \frac{3}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{35} \ \& \ y = \frac{9}{35}.$$

Vậy $(3x^2 + 2y^2)_{Min} = \frac{6}{35}$ đạt được khi $x = \frac{4}{35}$ và $y = \frac{9}{35}$.

## 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Ví dụ 1:** Giải phương trình: $2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{27}$. (1)

*Giải*

Biến đổi vế trái của phương trình: $2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{3}.3.[\,2x^4 + (1 - 2x)^4]$

$$= \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)[\,x^4 + x^4 + (1 - 2x)^4] \ge \frac{1}{3}[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]^2$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{9}\{3.[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2$$

$$= \frac{1}{27}\{(1^2 + 1^2 + 1^2)[\,x^2 + x^2 + (1 - 2x)^2]\}^2 \ge \frac{1}{27}[x + x + (1 - 2x)]^4 = \frac{1}{27}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2 = (1 - 2x)^2 \\ x = x = 1 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$ Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

## III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$, thì : $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$.

**Bài tập 2.** Chứng minh rằng nếu $x + 3y = 2$, thì: $x^2 + y^2 \ge \frac{5}{2}$.

**Bài tập 3.** Chứng minh rằng nếu $2x + 3y = 7$, thì : $2x^2 + 3y^2 \ge \frac{49}{5}$.

**Bài tập 4.** Cho a, b, c, p, q là 5 số dương tuỳ ý. Chứng minh:

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \ge \frac{3}{p+q}.$$

**Bài tập 5.** Cho a, b, c là ba số dương cho trước, còn x, y, z là ba số dương thay đổi, luôn luôn thoả mãn điều kiện: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = x + y + z$.

## IV. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 4**: Ký hiệu bất đẳng thức cần chứng minh là (1)

Để ý rằng: $a = \sqrt{\frac{a}{pb+qc}} \cdot \sqrt{a(pb+qc)}$,

$$b = \sqrt{\frac{b}{pc+qa}} \cdot \sqrt{b(pc+qa)}, \quad c = \sqrt{\frac{c}{pa+qb}} \cdot \sqrt{c(pa+qb)}$$

Gọi S là vế trái của bất đẳng thức (1).

Ta có: $$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{pb+qc}} \cdot \sqrt{a(pb+qc)} + \sqrt{\frac{b}{pc+qa}} \cdot \sqrt{b(pc+qa)} + \sqrt{\frac{c}{pa+qb}} \cdot \sqrt{c(pa+qb)}\right)^2$$

$$\le S.[a(pb+qc) + b(pc+qa) + c(pa+qb)]$$
$$= S(p+q)(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

Mặt khác: $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$,

bởi: $3(ab+bc+ca) = (ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)$
$$\le a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2.$$

Với kết quả đó từ (2) ta suy ra: $(a+b+c)^2 \le S(p+q).\frac{(a+b+c)^2}{3}$

$\Rightarrow S \geq \dfrac{3}{p+q}$, vì $a + b + c > 0$, $p + q > 0$.

**Bài tập 5** : Ta có: $\sqrt{a} = \sqrt{\dfrac{a}{x}}.\sqrt{x}$,

Vậy ta được: $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \left(\sqrt{\dfrac{a}{x}}.\sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{b}{y}}.\sqrt{y} + \sqrt{\dfrac{c}{z}}.\sqrt{z}\right)^2$

$$\leq \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)(x + y + z) = S.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sqrt{x} : \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{y} : \sqrt{\frac{b}{y}} = \sqrt{z} : \sqrt{\frac{c}{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{a}} = \dfrac{y}{\sqrt{b}} = \dfrac{z}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}};\ y = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}};\ z = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Vậy $\text{Min}(x + y + z) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài tập 1.** Chứng minh rằng:

a. $5a - 3 > 5b + 8$ với $a > b$.

b. $7 - 2a < 2 - 2b$ với $a > b$.

**Bài tập 2.** Chứng minh rằng:

a. $4a^2 + 9b^2 \geq 12ab$ với $a, b \in \mathbf{R}$.

b. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ nếu $a > 0, b > 0$.

c. $\dfrac{1}{2}(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$ nếu $a \geq 0, b \geq 0$.

d. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$ với $a, b \in \mathbf{R}$.

**Bài tập 3.** Chứng minh rằng:

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với $a, b, c \in \mathbf{R}$.

b. $a^2 + b^2 + ab \geq 0$ với $a, b \in \mathbf{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

**Bài tập 4.** Chứng tỏ rằng 7,99 là nghiệm của bất phương trình: $x < 8$

Hãy kể ra năm số lớn hơn 7,99 mà cũng là nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài tập 5.** Chứng tỏ rằng 5,02 là nghiệm của bất phương trình: $x > 5$

Hãy kể ra năm số nhỏ hơn 5,02 mà cũng là nghiệm của bất phương trình đó.

**Bài tập 6.** Cho biểu thức: $A = \frac{x-3}{x+1}$.

a. Tìm giá trị của x để A = 2.

b. Tìm giá trị của x để A > 1.

**Bài tập 7.** Tìm tập xác định của biểu thức, rút gọn biểu thức và tìm giá trị của x để biểu thức thu gọn có giá trị âm:

$$A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3\right) : \frac{2-4x}{x+1} + \frac{x^2-3x-1}{3x}.$$

**Bài tập 8.** Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số.

a. $2(5x-1) - 8x > 4x + 5$.

b. $4x - 9 \geq 2(4x+1) + 5$.

**Bài tập 9.** Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số.

a. $2x + 5,4 < \frac{3x-8}{5}$.

b. $2 + \frac{2+4x}{3} > \frac{5x-7}{4} + 8$.

**Bài tập 10.** Giải phương trình: $\frac{8x-1}{5x-1} + \frac{7x-3}{3-5x} = \frac{4x}{(1-5x)(5x-3)}$.

**Bài tập 11.** Giải các bất phương trình:

a. $\frac{x-5}{4} - \frac{2x-1}{2} < 3$.

b. $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2}$.

Sau đó tìm các giá trị nguyên của x thoả mãn cả hai bất phương trình trên.

**Bài tập 12.** Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2x+1}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} - \frac{16x^2}{4x^2-1}\right) : \frac{16x^3-4x}{4x^2-4x+1}$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để biểu thức A có giá trị dương.

**Bài tập 13.** Cho biểu thức: $A = \frac{1}{x^2-2x+1} - \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^3-x}\right) : \frac{x^2-2x+1}{x+x^3}$.

a. Tìm tập xác định của biểu thức A.

b. Rút gọn biểu thức A.

c. Tính giá trị của biểu thức A với x = 2; x = −1.

d. Tìm giá trị của x để A = −1.

e. Chứng minh rằng A < 0 với mọi giá trị của x thuộc tập xác định của biểu thức.

f. Tìm giá trị của x để A > −1.

**Bài tập 14.** Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của x để biểu thức rút gọn âm:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4(4x - 8)}.$$

**Bài tập 15.** Giải phương trình: $\frac{x + 4}{5} - x - 5 = \frac{x + 3}{3} - \frac{x - 2}{2}$.

**Bài tập 16.** Tách phần nguyên của biểu thức sau đây và tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức cũng có giá trị nguyên: $\frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$.

**Bài tập 17.** Giải các phương trình:

a. $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$.

b. $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$.

c. $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$.

d. $x^2 + 12x + 32 = 0$.

**Bài tập 18.** Rút gọn rồi chứng minh các biểu thức sau luôn luôn dương với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định của biểu thức:

a. $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$.

b. $\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$.

**Bài tập 19.** Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x thuộc tập xác định của biểu thức:

$$\left[\frac{x^2}{(x+2)^2(x-2)} - \frac{8x}{(x^2-4)^2} + \frac{4}{(x+2)(x-2)^2}\right]\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

**Bài tập 20.** Giải phương trình: $\frac{5x^2 - 2}{x + 2} - \frac{5x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{27x}{(x+2)(x-1)} - 1$.

**Bài tập 21.** Cho biểu thức: $A = \left[\left(\frac{1}{x^2} + 1\right).\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{2}{(x+1)^3}.\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] : \frac{x-1}{x^3}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm giá trị của x để $A = 3$.

c. Tìm giá trị của x để $A < 1$.

d. Tìm giá trị của x để $A < 0$.

**Bài tập 22.** Chứng minh hằng đẳng thức: $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

**Bài tập 23.** Cho hai số x và y có tổng bằng 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức xy.

**Bài tập 24.** Cho hai số dương x và y có tích bằng 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$.

**Bài tập 25.** Cho biết $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a. $A = x^2 + y^2$.

b. $B = x^3 + y^3$.

**Bài tập 26.** Chứng tỏ rằng, trong một tam giác thì độ dài một cạnh luôn nhỏ hơn nửa chu vi.

**Bài tập 27.** Chứng minh rằng:

a. $(m + 1)^2 \geq 4m$.

b. $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m + n)$.

**Bài tập 28.** Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh rằng: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

**Bài tập 29.** Chứng tỏ diện tích hình vuông cạnh lớn hơn 10m không nhỏ hơn hình chữ nhật có cùng chu vi.

**Bài tập 30.** Giải các bất phương trình:

a. $5(x - 3)(x + 3) < 5x^2 + 2x$.

b. $(4x + 5)(2x - 7) > 10x^2 + 8x + 7$.

**Bài tập 31.** Giải các bất phương trình:

a. $\frac{3x^2 - 7x}{5} + \frac{5x + 1}{4} < \frac{x(3x - 1)}{2}$.

b. $\frac{3x - 21}{4} - \frac{3x^2 + x}{3} > \frac{x(1 - 2x)}{2} - \frac{4x}{5}$.

**Bài tập 32.** Cho hai biểu thức: $A = \frac{3x - 2}{35} + \frac{x(x - 5)}{5}$ và $B = \frac{3x - 2}{35} + \frac{x(x - 5)}{5}$

a. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không lớn hơn giá trị biểu thức B ?

b. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không nhỏ hơn giá trị biểu thức B ?

**Bài tập 33.** Cho hai biểu thức: $A = \frac{6x - 1}{18} + \frac{x + 3}{12}$ và $B = \frac{3x - 2}{9} + \frac{2x - 5}{6}$

a. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không lớn hơn giá trị biểu thức B ?

b. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức A không nhỏ hơn giá trị biểu thức B ?

**Bài tập 34.** Tìm x sao cho:

a. $-(2 - x)^2 < 0$.

b. $x(x - 1)(x - 2) < 0$.

**Bài tập 35.** Tìm x sao cho:

a. $(2 - x)^2 > 0$.

b. $(x - 4)(x - 5) > 0$.

**Bài tập 36.** Tìm x sao cho:

a. $\frac{x - 1}{x - 2} > 0$.

b. $\frac{x + 3}{x + 4} < 0$.

**Bài tập 37.** Giải bất phương trình:

a. $(x - 4)(x - 5) > (x + 2)(x + 8)$.

b. $(x - 2)(x + 2) - (1 - 3x)(x + 4) > 4x(x - 1)$.

c. $x - \frac{2x - 1}{4} \geq 1$.

d. $x - \frac{x - 1}{3} - \frac{x + 5}{4} > 5$.

**Bài tập 38.** Với giá trị nào của x thì:

a. $(25 - x)(x - 52) > 0$.  b. $\frac{x-1}{25-x} < 0$.  c. $\frac{12x-1}{x+31} > 0$

**Bài tập 39.** Chứng tỏ rằng các phương trình sau vô nghiệm:

a. $|5x + 9| = 5x + 2$.  b. $|8x - 3| = 8x - 8$.

**Bài tập 40.** Giải các phương trình:

a. $|3x| = 5x - 6$.  b. $|x + 18| = 7x - 9$.

c. $|-33x| = 25x + 10$.  d. $|4 - 7x| = x - 16$.

**Bài tập 41.** Giải các phương trình sau:

a. $|5x + 2| = 13$.  b. $|8x - 7| = 9$.  c. $|15 - 3x| + 2 = 23$.

**Bài tập 42.** Giải các phương trình sau:

a. $|3x + 13| = |x - 2|$.  b. $|5x - 18| = |7 - x|$.  c. $|23 - 7x| = |x|$.

**Bài tập 43.** Một người đi bộ một quãng đường dài 18km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5km/h, về sau đi với vận tốc 4km/h. Xác định độ dài quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h.

**Bài tập 44.** Hai công nhân được giao làm một số sản phẩm, người thứ nhất làm nhiều hơn người thứ hai là 30 chiếc. Người thứ nhất làm trong 15 ngày, người thứ hai làm trong 12 ngày. Biết rằng mỗi ngày người thứ nhất làm ít hơn người thứ hai là 3 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi người làm trong một ngày.

**Bài tập 45.** Hai đội công nhân đặt dây điện trên một đoạn đường. Nếu họ cùng làm thì sau 4 ngày xong việc. Nhưng khi thực hiện, đội II phải làm một việc khác. Đội I là một mình được 9 ngày thì đội II trở lại. Họ cùng làm 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc?

**Bài tập 46.** Một tổ sản xuất phải làm một số dụng cụ trong 18 ngày. Do đã vượt mức mỗi ngày 5 chiếc nên sau 16 ngày tổ đã làm xong số dụng cụ được giao và còn làm thêm 20 dụng cụ nữa. Tính số dụng cụ tổ sản xuất đó được giao.

**Bài tập 47.** Hai đội công nhân lâm nghiệp trồng được tất cả 410 cây, trong đó đội I làm trong 4 giờ, đội II làm trong 5 giờ. Biết rằng nếu đội I làm trong 5 giờ, đội II làm trong 4 giờ thì số cây hai đội trồng được bằng nhau. Tính xem mỗi giờ mỗi đội trồng được bao nhiêu cây?

**Bài tập 48.** Giải các bất phương trình rồi biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a. $|6x + 1| < 15$.  b. $|x - 14| > 5$.

c. $|2x - 3| \geq 17$.  d. $|4 - 7x| \leq 25$.

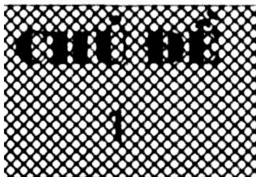
# Phần 2

# Hình học

# CHƯƠNG I - TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về sự đồng dạng củ hai tam giác, cụ thể:

1. **Định lí Ta - lét trong tam giác**
2. **Tính chất đường phân giác của tam giác**
3. **Hai tam giác đồng dạng**




# ĐỊNH LÍ TA - LÉT TRONG TAM GIÁC

## KIẾN THỨC CƠ BẢN

### TỈ SỐ CỦA HAI ĐOẠN THẲNG

| |
|---|
| ***Định nghĩa***: *Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.* |

**hí dụ 1:**

Với AB = 6cm và CD = 8cm thì ta có tỉ số của nó: $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Với AB = 2cm và CD = 1dm thì ta có tỉ số của nó: $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

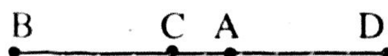


**Chú ý:**
1. Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.
2. Dựa vào tỉ số của hai đoạn thẳng chúng ta có thể tính được độ dài của đoạn thẳng, thí dụ sau minh hoạ điều này.

**hí dụ 2:** Cho đoạn thẳng AB = 5cm. Trên đường thẳng AB lấy các điểm C, D sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$ (C nằm trong đoạn thẳng AB, D nằm ngoài đoạn thẳng AB). Tính độ dài các đoạn thẳng CA, DA.

*iải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:




*ách 1*: Ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CA}{CA + CB} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CA}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow CA = 5cm.$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DA}{DB - DA} = \frac{1}{2-1} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{DA}{15} = 1 \Rightarrow DA = 15cm.$$

*ách 2*: Ta có: $\frac{CA}{1} = \frac{CB}{2} = \frac{CA + CB}{1+2} = \frac{AB}{3} = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow CA = 5cm.$

$$\frac{DA}{1} = \frac{DB}{2} = \frac{DB - DA}{2-1} = \frac{AB}{1} = 15 \Rightarrow DA = 15cm.$$

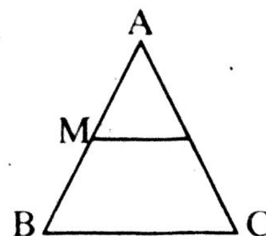
### . ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

**hí dụ 3:** Cho ΔABC, gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Hãy tính các tỉ số $\frac{AM}{AB}$ và $\frac{AN}{AC}$.

*Giải*

Với giả thiết:

- M là trung điểm của AB, ta được: $\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{2AM} = \frac{1}{2}$.
- N là trung điểm của AC, ta được: $\frac{AN}{AC} = \frac{AN}{2AN} = \frac{1}{2}$.




**Nhận xét:** Theo kết quả trên, ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

khi đó, người ta nói "*hai đoạn thẳng AM và AB tỉ lệ với hai đoạn thẳng AN và AC.*"

Từ đó, ta có định nghĩa:

> ***Định nghĩa**: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A_1B_1$ và $C_1D_1$ nếu có hệ thức:* $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ *hoặc* $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

## 3. ĐỊNH LÍ TA – LÉT TRONG TAM GIÁC

Nội dung của định lí Ta – lét như sau:

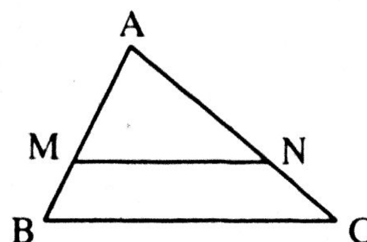
> ***Định lí Ta - lét**: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

Như vậy, trong ΔABC nếu MN song song với BC, ta nhận được:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC},$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}.$$




**Thí dụ 4:** Tính các độ dài x, y và z trong hình vẽ, biết BC = 12cm.

*Giải*

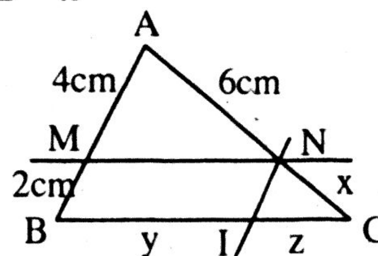
Với MN song song với BC, ta có: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 3cm$.

Với NI song song với AB, ta có:

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CI}{CB} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{z}{12} \Leftrightarrow z = 4cm.$$

Ta có: BC = BI + CI ⇔ 12 = y + 4 ⇔ y = 8cm.

Vậy, ta nhận được x = 3cm, y = 8cm và z = 4cm.



**Nhận xét**:

1. Trước hết ta có nhận xét: $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{2}{6} + \frac{8}{12} = 1$

từ đó, ta có thể nêu một bài toán:

"*Cho ΔABC. Từ điểm N trên AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC và AB, chúng cắt các cạnh AB và BC theo thứ tự tại M và I.*

*Chứng minh rằng:* $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$".

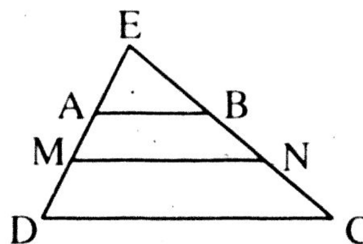
2. Kết luận của định lí Ta - let vẫn đúng trong hình thang, cụ thể:

"*Cho hình thang ABCD có AB // CD và AB < CD. Đường thẳng song song với AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng:*

a. $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$.

b. $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$.

c. $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}$".




Thật vậy:

a. Kéo dài AD và BC, chúng cắt nhau tại E, khi đó ta lần lượt xét:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MA}{AE}.\frac{AE}{AD} = \frac{NB}{BE}.\frac{BE}{BC} = \frac{NB}{BC}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách:

*Cách 1*: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC} \Leftrightarrow \frac{MA}{AD - MA} = \frac{NB}{BC - NB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}.$$

*Cách 2*: Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MA}{ME}.\frac{ME}{MD} = \frac{NB}{NE}.\frac{NE}{NC} = \frac{NB}{NC}.$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách:

*Cách 1*: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} \Leftrightarrow \frac{MA + MD}{MD} = \frac{NB + NC}{NC} \Leftrightarrow \frac{AD}{MD} = \frac{BC}{NC}.$$

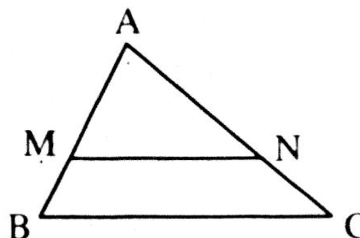
*Cách 2*: Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MD}{AD} = \frac{MD}{DE}\cdot\frac{DE}{AD} = \frac{NC}{CE}\cdot\frac{CE}{BC} = \frac{NC}{BC}.$$

## 4. ĐỊNH LÍ TA – LÉT ĐẢO

***Định lí Ta – lét đảo***: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

Như vậy, trong $\Delta ABC$ nếu ta có:




$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow MN // BC,$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow MN // BC,$$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \Leftrightarrow MN // BC.$$

**Nhận xét**: Theo kết quả của định lí Ta - let đảo, ta có được thêm một cách để chứng minh *hai đường thẳng song song và đường trung bình* của tam giác.

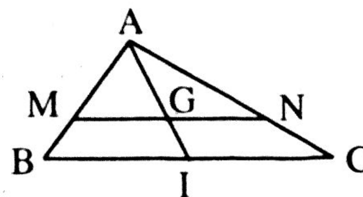
**Thí dụ 5:** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm G. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và AC sao cho $AM = 2MB$ và $AN = \frac{2}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm M, N, G thẳng hàng.

*Giải*

Gọi I là trung điểm của BC.

Từ giả thiết về các điểm M, N ta được: $\frac{AM}{BM} = 2$ và $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$.

Vì G là trọng tâm $\Delta ABC$, suy ra:




$$\frac{AG}{IG} = 2 \Rightarrow \frac{AG}{IG} = \frac{AM}{BM} \Leftrightarrow MG // BI. \quad (1)$$

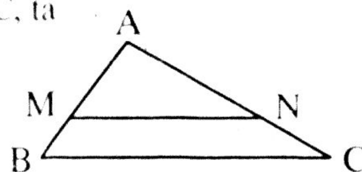
$$\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AI} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow NG // CI. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, N, G thẳng hàng.

## 5. HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÍ TA – LÉT

*Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.*

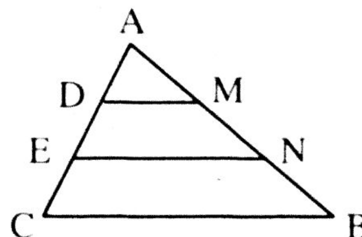
Như vậy, trong $\Delta ABC$ nếu MN song song với BC, ta nhận được:




$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

**Thí dụ 6:** Cho $\Delta ABC$ có BC = a. Lấy các điểm M, N trên AB sao cho AM = MN = NB. Từ M, N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC theo thứ tự tại D, E. Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN.

*Giải*




Ta lần lượt có: $\frac{DM}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}$.

$\frac{EN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EN = \frac{2a}{3}$.

**Chú ý:** Hệ quả trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

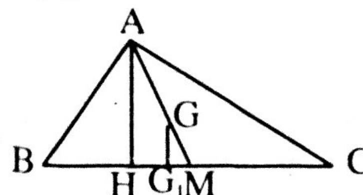
## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng các tam giác $\Delta GBC$, $\Delta GAC$, $\Delta GAB$ có diện tích bằng nhau.

*Giải*

Gọi M là trung điểm BC, đường cao AH, hạ $GG_1$ vuông góc với BC.

Vì $GG_1$ // AH nên:




$$\frac{GG_1}{AH} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GG_1 = \frac{1}{3}AH.$$

Khi đó, $\Delta GBC$ có diện tích được cho bởi:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}GG_1.BC = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}AH.BC = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AH.BC\right) = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được: $S_{\Delta GAC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta GAB} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$.

Vậy, các tam giác $\Delta GBC$, $\Delta GAC$, $\Delta GAB$ có diện tích bằng nhau .

**Ví dụ 2:** Hình thang ABCD (AB // CD) có các đường chéo cắt nhau tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N.

a. Chứng minh rằng OM = ON.

b. Một đường thẳng đi qua O cắt hai đáy AB và CD thứ tự tại E và F. Biết tỉ số $\frac{EA}{EB} = \frac{m}{n}$, hãy tính tỉ số $\frac{FD}{FC}$.

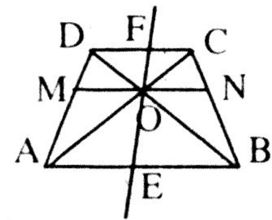
*Giải*

a. Áp dụng định lí Talet, ta lần lượt xét với:

- Trong $\Delta ADC$, vì MO // CD nên: $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$. (1)
- Trong $\Delta ABC$, vì NO // AB nên: $\frac{AO}{AC} = \frac{BN}{BC}$. (2)
- Trong $\Delta BCD$, vì NO // CD nên: $\frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow OM = ON$, đpcm.

b. Trong $\Delta OFC$ vì AB // CD nên: $\frac{EA}{FC} = \frac{OE}{OF}$. (4)




Trong $\Delta OFD$ vì AB // CD nên: $\frac{EB}{FD} = \frac{OE}{OF}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{EA}{FC} = \frac{EB}{FD} \Rightarrow \frac{FD}{FC} = \frac{EB}{EA} = \frac{n}{m}$.

**Nhận xét:** **1.** Ta có thể chứng minh OM = ON bằng phương pháp diện tích.

**2.** Trong ví dụ trên để chứng minh OM = ON ta đi chứng minh $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$ bằng cách áp dụng định lí Ta-let ba lần, tỉ số $\frac{OM}{CD}$ lần lượt bằng $\frac{AO}{AC}, \frac{BN}{BC}, \frac{ON}{CD}$.

**3.** Khai thác kết quả của câu b), trong trường hợp m = n thì M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD, ta có định lí:

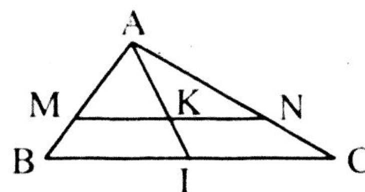
" *Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm hai đường chéo và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia* ".

Nói cách khác:

" *Các trung điểm của hai đáy và giao điểm hai đường chéo hình thang là ba điểm thẳng hàng* ".

**Ví dụ 3:** Trên các cạnh AB, AC của $\Delta ABC$, lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, K là giao điểm của đường thẳng AI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng K là trung điểm của cạnh MN.

*Giải*




Trong $\Delta ABC$ ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN // BC$

Trong $\Delta ABI$ vì $MN // BC$ nên: $\frac{MK}{BI} = \frac{AK}{AI}$. (1)

Trong $\Delta AIC$ vì $MN // BC$ nên: $\frac{AK}{AI} = \frac{KN}{IC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{MK}{BI} = \frac{KN}{IC} \Rightarrow \frac{MK}{KN} = \frac{BI}{IC} = 1$.

Vậy K là trung điểm của MN.

**Nhận xét:** Từ kết quả của ví dụ trên ta suy ra:

"*Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia*".

Nói cách khác:

"*Giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của hai đáy là ba điểm thẳng hàng*".

***Mở rộng:***

"*Trong hình thang (có hai đáy không bằng nhau), trung điểm của hai đáy, giao điểm hai đường chéo và giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên là bốn điểm thẳng hàng*".

Tính chất này được gọi là bổ đề hình thang.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:**

a. Phát biểu định nghĩa tỉ số của hai đoạn thẳng.

b. Tính tỉ số $\frac{AB}{CD}$ biết AB = 18cm, CD = 50mm.

**Câu hỏi 2:**

a. Phát biểu định nghĩa hai cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

b. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Điền vào chỗ trống: $\frac{a-b}{b} = \ldots$, $\frac{a}{b-a} = \ldots$

**Câu hỏi 3:**

a. Phát biểu định lí Talet và hệ quả.

b. Dùng định lí Talet để chứng minh định lí:

*"Nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm cạnh thứ ba"* .

**Câu hỏi 4:**

a. Phát biểu định lí Talet đảo.

b. Dùng định lí Talet đảo để chứng minh định lí:

*"Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh của tam giác thì song song với cạnh thứ ba "*.

**Câu hỏi 5:**

a. Phát biểu hệ quả của định lí Talet.

b. Dùng hệ quả của định lí Talet để chứng minh định lí:

*"Đường trung bình của tam giác thì bằng một nửa cạnh thứ ba "*.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1:** Tính tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau:

a. AB = 15cm, CD = 9cm.

b. EF = 125cm, GH = 10dm.

**Bài tập 2:** Cho ΔABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

a. Tính tỉ số $\frac{AF}{AB}$.

b. Kể tên một vài cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.

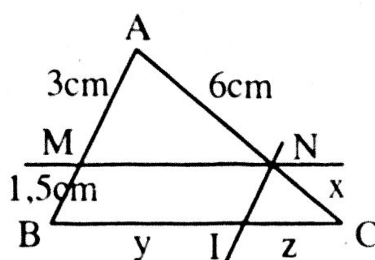
**Bài tập 3:** Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Các điểm C, D thuộc đường thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$ (C nằm trong, còn D nằm ngoài đoạn thẳng AB). Tính khoảng cách từ C và từ D đến B.

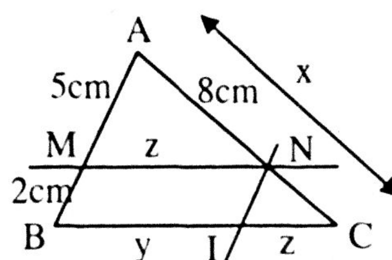
**Bài tập 4:** Cho AB = 4CD và CD = $3A_1B_1$.

a. Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và $A_1B_1$.

b. Biết MN = 9cm và $M_1N_1$ = 10,8dm, hỏi hai đoạn thẳng AB, $A_1B_1$ có tỉ lệ với hai đoạn thẳng MN và $M_1N_1$ hay không ?

**Bài tập 5:** Tính độ dài x, y, z của các đoạn thẳng trong hình sau, biết BC = 9cm:



**Bài tập 6:** Cho $\Delta ABC$ có $BC = a$. Lấy các điểm M, N trên AB sao cho $AM = 2MN = 3NB$. Từ M, N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC theo thứ tự tại D, E. Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN.

**Bài tập 7:** Cho $\Delta ABC$, $AC = 10cm$, $BC = 9cm$. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = 3cm$. Lấy các điểm G, H trên cạnh AC sao cho $AG = CH = 4cm$. Gọi E là giao điểm của BG và AD. Tính tỉ số $\frac{AE}{AD}$.

**Bài tập 8:** Cho $\Delta ABC$, điểm D thuộc cạnh BC. Cho biết $S_{ABD} = 15cm^2$, $S_{ADC} = 9cm^2$. Tính tỉ số $\frac{BD}{BC}$.

**Bài tập 9:** Cho $\Delta ABC$. Từ điểm N trên AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC và AB, chúng cắt các cạnh AB và BC theo thứ tự tại M và I. Chứng minh rằng $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$.

**Bài tập 10:** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, điểm D nằm giữa H và C. Kẻ DE vuông góc với BC ($E \in AC$), kẻ DK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh rằng BE song song với HK.

**Bài tập 11:** Hình thang ABCD (AB // CD) có các đường chéo cắt nhau tại O. Biết $OA = \frac{1}{3}OC, AB = 4cm$. Tính độ dài CD.

**Bài tập 12:** Hình thang ABCD (AB // CD) có $AB = 15cm$, $CD = 20cm$. Gọi M là trung điểm của CD, E là giao điểm của MA và BD, F là giao điểm của MB và AC.

a. Chứng minh rằng EF song song với AB.

b. Tính độ dài EF.

**Bài tập 13:** Hình thang ABCD (AB // CD) có $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, BD, AC, BC.

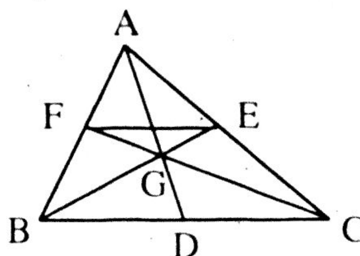
a. Chứng minh rằng $MN = PQ$.

b. Tính độ dài các đoạn thẳng MN, NP, PQ theo a và b.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$ và $\frac{EF}{GH} = \frac{5}{4}$.

**Bài tập 2.**




a. $\frac{AF}{AB} = 1$.

b. Theo tính chất trong tâm của tam giác, ta có: $\frac{AG}{GD} = 2$

suy ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD, bao gồm: $\frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = = 2$, tính chất của trong tâm tam giác.

$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{BD} = 2$, tính chất trung điểm.

$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD} = \frac{AB}{ED} = 2$, tính chất của đường trung bình .

**Bài tập 3.** Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

A C B D

- Ta có: $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{CA + CB}{CB} = \frac{3+2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow CB = 4cm.$

- Ta có: $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{DA - DB}{DB} = \frac{3-2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DB = 20cm.$

Vậy, ta tìm được CB = 4cm và DB = 20cm.

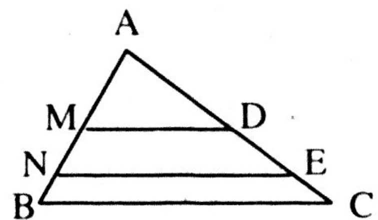
**Bài tập 4.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 5.**

a. x = 3cm, y = 6cm, z = 3cm.

b. *Học sinh tự làm.*

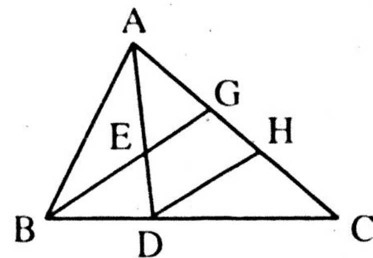
**Bài tập 6.** Đặt BN = x, suy ra: $AM = 3x,\ MN = \frac{3x}{2}$.




- Ta có: $\frac{MD}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3x}{3x + \frac{3x}{2} + x} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow MD = \frac{6a}{11}$.

- Ta có: $\frac{NE}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{3x + \frac{3x}{2}}{3x + \frac{3x}{2} + x} = \frac{9}{11} \Leftrightarrow NE = \frac{9a}{11}$.

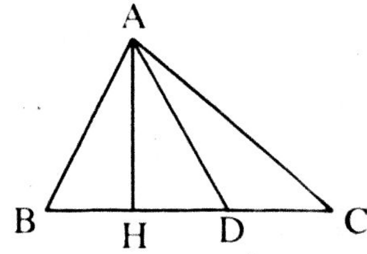
Vậy, ta tìm được $MD = \frac{6a}{11}$ và $NE = \frac{9a}{11}$.




**Bài tập 7.** Nhận xét rằng:

$\frac{CD}{BD} = \frac{6}{3} = 2,\ \frac{CH}{HG} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow DH \,//\, BG \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$.

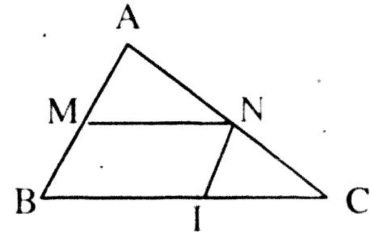
**Bài tập 8.** Kẻ đường cao AH, ta có:




$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{5}{3+5} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{5}{8}.$$

**Bài tập 9.** Trước tiên, ta thấy MNIB là hình bình hành.




Suy ra: $\frac{BM}{BA} = \frac{NI}{BA} = \frac{CI}{BC}$.

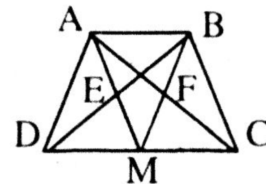
Khi đó: $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI}{BC} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI + BI}{BC} = 1$, đpcm.

**Bài tập 10.** *Học sinh tự làm* – Dựa trên các đường thẳng song song được suy ra từ tính chất " *Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau* ".

**Bài tập 11.** CD = 12cm.

**Bài tập 12.**

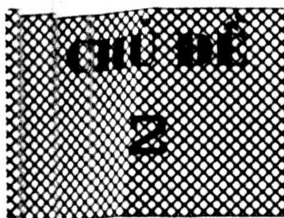
a. Ta lần lượt có nhận xét:




- Vì MD // AB nên: $\frac{ME}{AE} = \frac{DM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.
- Vì CD // AB nên: $\frac{MF}{BF} = \frac{CM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\frac{ME}{AE} = \frac{MF}{BF} \Leftrightarrow$ EF // AB, đpcm.

b. Ta có ngay: $\frac{EF}{AB} = \frac{MF}{MB} = \frac{MF}{BF + MF} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow EF = 6cm$.




# TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

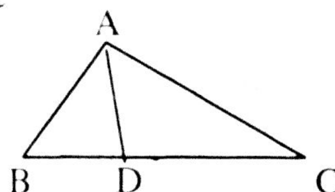
### 1. ĐỊNH LÍ

Ta có định lí về đường phân giác:

> **Định lí:** *Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.*

Như vậy, trong $\Delta ABC$ nếu AD là đường phân giác của góc $\widehat{A}$, ta nhận được: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

hoặc $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.




**Thí dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và AD là đường phân giác.

a. Tính độ dài các đoạn BD và CD theo a, b, c.

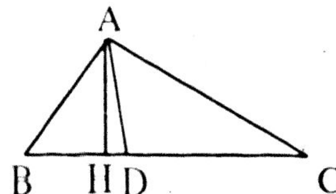
b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác $\Delta ABD$ và $\Delta ACD$.

*Giải*

a. Đặt $BD = x$. Trong $\Delta ABC$ có AD là phân giác, suy ra:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{a-x} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow CD = BC - BD = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}.$$



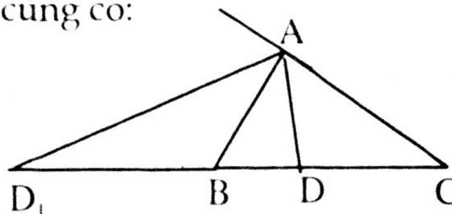

Vậy, ta được $BD = \frac{ac}{b+c}$ và $CD = \frac{ab}{b+c}$.

b. Kẻ đường cao AH, ta có: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.

**Chú ý:** Định lí trên vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác, tức là theo hình bên ta cũng có:

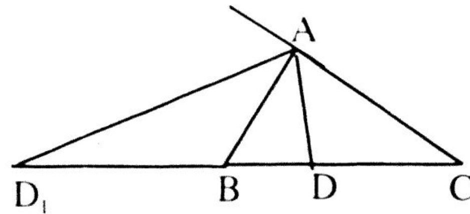
$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

hoặc $\frac{BD_1}{AB} = \frac{CD_1}{AC}$.



**Thí dụ 2:** Cho $\Delta ABC$ có AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 5cm. Đường phân giác tron và ngoài của góc A cắt BC theo thứ tự ở D và $D_1$. Tính độ dài BD, $BD_1$.

*Giải*




Đặt BD = x và $BD_1$ = y.

Trong $\Delta ABC$, ta lần lượt thấy:

- AD là phân giác trong, suy ra:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{5-x} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = 2cm.$$

- $AD_1$ là phân giác ngoài, suy ra:

$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{y}{y+5} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow y = 10cm.$$

Vậy ta được BD = 2cm và $BD_1$ = 10cm.

## 2. ĐỊNH LÍ ĐẢO

**Định lí:** *Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh của một tam giác mà chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy thì nó là đường phân giác trong (hoặc ngoài) của góc tại đỉnh ấy.*

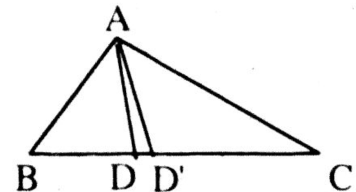
*Chứng minh*

Ta xét hai trường hợp là:

1. Phân giác trong.
2. Phân giác ngoài.

Ta có:

a. *Trường hợp phân giác trong*:




Xét $\Delta ABC$, giả sử đường thẳng đi qua A cắt BC tại D sao cho: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Ta sẽ chứng minh AD là phân giác trong của góc $\widehat{A}$.

Kẻ phân giác AD' của $\Delta ABC$, ta có ngay:

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{D'B}{D'B + D'C} = \frac{DB}{DB + DC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D'B}{BC} = \frac{DB}{BC} \Leftrightarrow D'B = DB \Leftrightarrow D' \equiv D.$$

Vậy, AD là đường phân giác của góc $\widehat{A}$.

b. *Trường hợp phân giác ngoài* - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

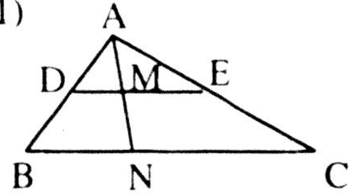
**Chú ý:**

1. Khái niệm "*chia cạnh đối diện*" được hiểu theo nghĩa chia trong hoặc chia ngoài một đoạn thẳng.
2. Bài toán trên là bài toán đảo của tính chất đường phân giác của tam giác. Và kết quả này có thể được sử dụng để giải thí dụ sau:

**Thí dụ 3:** Cho $\Delta ABC$. Một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC ở D, E. Biết BD = 9cm, CE = 12cm, DE = 14cm. Điểm M nằm trên đoạn thẳng DE sao cho DM = 6cm. Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc A.

*Giải*

Theo giả thiết ta có: $\frac{MD}{ME} = \frac{MD}{DE - MD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. (1)




Mặt khác, do DE // BC nên ta có:

$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. (2)

Từ (1), (2), suy ra: $\frac{MD}{ME} = \frac{AD}{AE}$ ⇔ AM là tia phân giác của góc A.

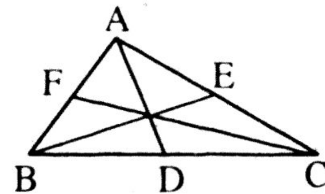
## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có các đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

*Giải*

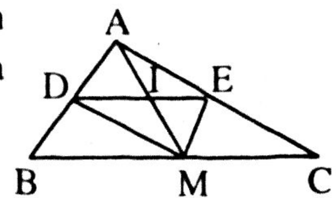
Trong $\Delta ABC$, ta lần lượt thấy:




- AD là phân giác, suy ra: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
- BE là phân giác, suy ra: $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}$.
- CF là phân giác, suy ra: $\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$.

Khi đó, ta có: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1$.

**Ví dụ 2:** Cho $\Delta ABC$ với trung tuyến AM. Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E. Chứng minh rằng DE // BC.




*Giải*

Với $\Delta AMB$ có MD là phân giác, suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$. (1)

Với $\Delta AMC$ có ME là phân giác, suy ra: $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}$. (2)

Theo giả thiết: MB = MC. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$ ⇔ DE // BC.

**Chú ý**: Khai thác kết quả của DE // BC ta có thể nêu thêm các câu:

a. Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng DI = IE.

b. Tính độ dài DE biết BC = 30cm, AM = 10cm.

*Giải*

a. Trong các tam giác ΔAMB và ΔAMC có DE // BC suy ra:

$$\frac{DI}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{EI}{CM} = \frac{EI}{BM} \Leftrightarrow DI = IE.$$

b. Đặt DE = x.

Trong ΔDEM, ta có:

$\widehat{DME} = 90^0$, vì MD, ME là tia phân giác của 2 góc kề bù

DI = IE ⇒ MI là trung tuyến

$$\Rightarrow MI = \frac{1}{2}DE \Rightarrow AI = AM - MI = 10 - \frac{1}{2}x.$$

Trong ΔABM, ta có: $\frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AM} \Leftrightarrow \frac{x}{30} = \frac{10 - \frac{1}{2}x}{10} \Rightarrow x = 12cm$

Vậy, ta được DE = 12cm.

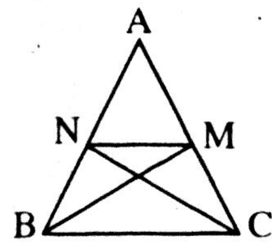
**Ví dụ 3:** Cho ΔABC cân tại A, có AB = a, BC = b. Đường phân giác góc B cắt AC tại M, đường phân giác góc C cắt AB tại N.

a. Chứng minh rằng MN // BC. b. Tính độ dài đoạn MN theo a, b.

*Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Trong ΔABC, ta lần lượt thấy:




- BM là phân giác, suy ra: $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BC}$. (1)
- CN là phân giác, suy ra: $\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}$. (2)

Theo giả thiết: AB = AC. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{AM}{CM} = \frac{AN}{BN} \Leftrightarrow MN // BC$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow MN = \frac{AN.BC}{AB}$. (4)

Từ (2) suy ra: $\frac{AN}{AB - AN} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AN}{a - AN} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow AN = \frac{a^2}{a + b}$. (5)

Thay (5) và [illegible] được: $MN = \frac{\frac{a^2}{a+b}.b}{a} = \frac{ab}{a + b}$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu tính chất đường phân giác của tam giác.

**Câu hỏi 2:** Chứng minh rằng " *Trong tam giác cân, đường phân giác ứng với cạnh đáy cũng là đường trung tuyến* ".

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 90^0$, $\widehat{C} = 30^0$, phân giác BD. Tính tỉ số $\frac{AD}{DC}$.

**Bài tập 2.** Cho $\Delta ABC$ có BC = 5cm, AC = 4cm, AB = 6cm và AD là đường phân giác.

a. Tính độ dài các đoạn BD và CD.

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác $\Delta ABD$ và $\Delta ACD$.

**Bài tập 3.** Cho $\Delta ABC$ với trung tuyến AM. Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E.

a. Chứng minh rằng DE // BC.

b. Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng DI = IE.

c. Tính độ dài DE biết BC = 6cm, AM = 8cm.

**Bài tập 4.** Cho $\Delta ABC$ có AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 8cm. Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC theo thứ tự ở D và E. Tính độ dài BD, BE.

**Bài tập 5.** Cho $\Delta ABC$ có AB = AC = 6cm. Tia phân giác góc B cắt đường cao AH ở I. Biết $\frac{AI}{IH} = \frac{3}{2}$. Tính chu vi $\Delta ABC$.

**Bài tập 6.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, có AB = a, AC = b, trung tuyến AM, đường phân giác AD và đường cao AH.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BD, CD, AM, DM, AH, HD, AD.

b. Đường thẳng qua D song song với AB cắt CD tại E, tính độ dài DE.

c. Tính diện tích các tam giác $\Delta ABD$, $\Delta ACD$, $\Delta ADE$, $\Delta CDE$.

d. Hỏi diện tích $\Delta ADM$ chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích $\Delta ABC$.

**Bài tập 7.** Cho $\Delta ABC$ cân tại A, có AB = a, BC = b, đường phân giác BD. Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, CD, CE.

**Bài tập 8.** Cho $\Delta ABC$, có AB = a, AC = b, trung tuyến AM, đường phân giác AD và diện tích $\Delta ABC$ bằng S. Hỏi diện tích $\Delta ADM$ chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích $\Delta ABC$.

**Bài tập 9.** Cho $\Delta ABC$, có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, đường phân giác AD và diện tích $\Delta ABC$ bằng S. Đường thẳng qua D song song với AB cắt CD tại E.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BD, CD, DE.

b. Tính diện tích các tam giác $\Delta ABD$, $\Delta ADE$, $\Delta CDE$.

## V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$.

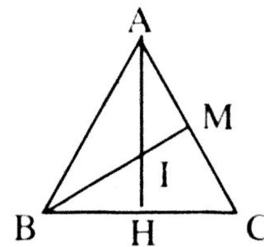
**Bài tập 2.**

a. BD = 3cm, CD = 2cm.

b. $\frac{3}{2}$.

**Bài tập 3.** Tham khảo ví dụ 2 và chú ý ngay sau đó.

**Bài tập 4.** Tham khảo thí dụ 2.




**Bài tập 5.** Trong $\Delta ABH$, ta có: $\frac{BH}{AB} = \frac{HI}{AI} \Rightarrow BH = 4cm$.

Khi đó, chu vi của $\Delta ABC$ được cho bởi:

$$CV = AB + AC + BC = 2AB + 2HB = 20cm.$$

**Bài tập 6.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 7.** *Hướng dẫn*: BE chính là phân giác ngoài của góc B.

**Bài tập 8.** *Đề nghị học sinh tự vẽ hình với $b > a$.*

Gọi $S_1$ là diện tích của $\Delta ADM$, ta có:

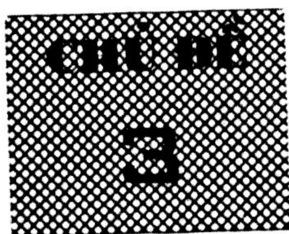
$$\frac{S_1}{S} = \frac{DM}{BC} = \frac{CD - CM}{BC} = \frac{CD}{BC} - \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Vì AD là đường phân giác của góc $\hat{A}$ nên:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{CD}{BD + CD} = \frac{b}{a + b} \Leftrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{b}{a + b}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b}{a + b} - \frac{1}{2} = \frac{b - a}{2(a + b)} \Leftrightarrow S_1 = \frac{(b - a)S}{2(a + b)}$$



# HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

**Định nghĩa**: *Nói $\Delta A_1B_1C_1$ gọi là đồng dạng với $\Delta ABC$ nếu:*

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A},\ \widehat{B_1} = \widehat{B},\ \widehat{C_1} = \widehat{C} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$

Khi đó:

- Kí hiệu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$.
- Tỉ số $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} = k$ gọi là *tỉ số đồng dạng.*

**Chú ý:** Khi viết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$, chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng: $\Delta B_1A_1C_1 \backsim \Delta ABC$, và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu đồng dạng: $\Delta B_1A_1C_1 \backsim \Delta BAC$.

**Thí dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm. Biết $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với $\Delta ABC$.

a. Tính các cạnh $A_1B_1$, $A_1C_1$, biết $B_1C_1$ = 8cm.

b. Tính các cạnh $A_1B_1$, $B_1C_1$, $A_1C_1$, biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số bằng 3.

*Giải*

a. Ta có ngay: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{A_1B_1}{3} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{C_1A_1}{5} \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 6cm \\ A_1C_1 = 10cm \end{cases}$

Vậy, với $B_1C_1$ = 8cm ta được $A_1B_1$ = 6cm, $A_1C_1$ = 10cm.

b. Ta có ngay: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} = k$

$$\Leftrightarrow \dfrac{A_1B_1}{3} = \dfrac{B_1C_1}{4} = \dfrac{C_1A_1}{5} = 3 \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 9cm \\ B_1C_1 = 12cm \\ A_1C_1 = 15cm \end{cases}.$$

Vậy, ta được $A_1B_1$ = 9cm, $B_1C_1$ = 12cm, $A_1C_1$ = 15cm.

## 2. TÍNH CHẤT

Từ định nghĩa về hai tam giác đồng dạng, ta có được các tính chất sau:

1. *Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.*

2. *Nếu* $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ *với tỉ số k thì* $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ *với tỉ số* $\dfrac{1}{k}$.

3. *Nếu* $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ *với tỉ số* $k_1$ *và* $\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta ABC$ *với tỉ số* $k_2$ *thì* $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ *với tỉ số* $k_1.k_2$.

**Thí dụ 2:** Cho hai tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta ABC$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh rằng tỉ số chu vi của hai tam giác cũng bằng k.

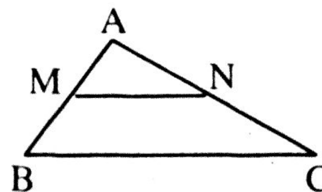
*Giải*

Từ giả thiết, ta có:

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}{AB + BC + CA} = \frac{CV_{\Delta A_1B_1C_1}}{CV_{\Delta ABC}}.$$

## 3. ĐỊNH LÍ

***Định lí**: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam Giaỷiác mới đồng dạng với tam giác đã cho.*




Như vậy, theo hình vẽ ta có: $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$,

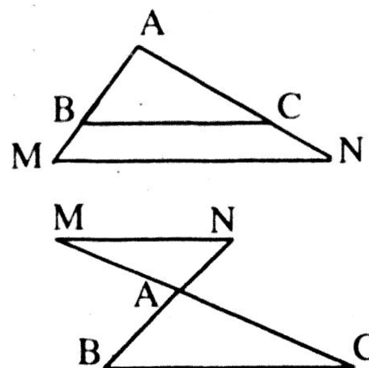
Tỉ số đồng dạng: $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

**Chú ý:** Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng d cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại, tức là theo hình bên ta cũng có:

$\Delta AMN \backsim \Delta ABC$,

Tỉ số đồng dạng :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

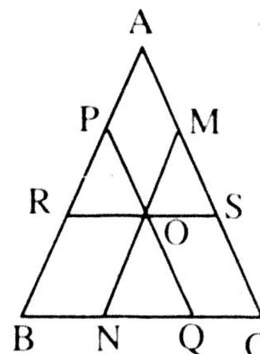



**Thí dụ 3:** Qua điểm O ở bên trong $\Delta ABC$ kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thường 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là 4cm$^2$, 9 cm$^2$, 16 cm$^2$. Tính diện tích của $\Delta ABC$.

*Giải*

Giả sử qua O kẻ các đường thẳng: RS // BC, MN // AB, PQ // AC.

Dễ dàng thấy rằng các tam giác ΔABC, ΔOMS, ΔOPR, ΔOMQ đồng dạng với nhau, do đó nếu gọi S, $S_1$, $S_2$, $S_3$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác. Ta có:




$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{PR}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{PR}{AB}. \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S}=\left(\frac{OM}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{S}}=\frac{OM}{AB}=\frac{AP}{AB}. \quad (2)$$

$$\frac{S_3}{S}=\left(\frac{ON}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{S}}=\frac{ON}{AB}=\frac{RB}{AB}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{2+3+4}{\sqrt{S}}=\frac{AP+PR+RB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1 \Leftrightarrow \sqrt{S}=9 \Leftrightarrow S=81\text{ cm}^2.$$

Vậy, diện tích của ΔABC là $S = 81\text{ cm}^2$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích 1: 1000, bản thứ hai theo tỉ xích 1: 10000. Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.

*Giải*

Gọi ΔABC là hình biểu diễn mảnh đất, $\Delta A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là hình của các bản đồ với tỉ xích 1: 1000 và 1: 10000.

Ta có:

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC,\ \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{1000}.$$

$$\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta ABC,\ \frac{A_2B_2}{AB}=\frac{1}{10000}.$$

Suy ra: $\frac{A_1B_1}{AB}:\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{1}{1000}:\frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{A_2B_2}=10.$

Vậy $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, tỉ số $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=10.$

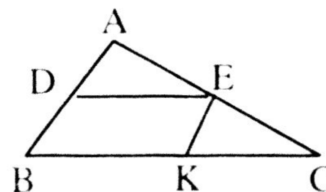
**Ví dụ 2:** Cho ΔABC có AB = 6cm, AC = 9cm. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho BD = 4cm, CE = 6cm.

a. Chứng minh rằng ΔADE ∽ ΔABC và xác định tỉ số đồng dạng.

b. Kẻ EK // AB (K ∈ BC). Chứng minh rằng $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

c. Tính tỉ số chu vi $\Delta ADE$ và $\Delta EKC$.

*Giải*




a. Trong $\Delta ABC$ ta có: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE // BC \Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Tỉ số đồng dạng của $\Delta ADE$ và $\Delta ABC$ là: $k = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$.

b. Theo kết quả câu a) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Mặt khác vì EK // AB nên: $\Delta EKC \backsim \Delta ABC$.

suy ra $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

c. Theo kết quả câu b) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$ suy ra:

$$\frac{AD}{EK} = \frac{DE}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{AD + DE + AE}{EK + KC + EC} = \frac{CV_{\Delta ADE}}{CV_{\Delta EKC}}.$$

Vậy $CV_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} CV_{\Delta EKC}$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Hai tam giác đều có đồng dạng với nhau không? Tại sao?

**Câu hỏi 2:** Hai tam giác bằng nhau có đồng dạng với nhau không? Tại sao?

**Câu hỏi 3:** $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$. Hãy điền vào chỗ trống: $\hat{C} = ...,\ \frac{AC}{...} = \frac{...}{EF}$.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho $\Delta ABC$ có AB = 2cm, BC = 4cm, CA = 3cm. Biết $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với $\Delta ABC$.

a. Tính các cạnh $A_1B_1$, $A_1C_1$, biết $B_1C_1$ = 10cm.

b. Tính các cạnh $A_1B_1$, $B_1C_1$, $A_1C_1$, biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số bằng $\frac{1}{3}$.

**Bài tập 2.** Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích 1: 100, bản thứ hai theo tỉ xích 1: 50000. Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.

**Bài tập 3.** Cho $\Delta ABC$ đồng dạng với $\Delta DEF$, tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2}{3}$.

a. Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b. Tính chu vi $\Delta DEF$ biết chu vi $\Delta ABC$ bằng 30cm.

c. Tính chu vi của mỗi tam giác đã cho, biết hiệu chu vi của hai tam giác trên bằng 2dm.

**Bài tập 4.** Cho hình thang ABCD (AB // CD) có CD = 2AB. Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh rằng ba tam giác $\Delta ADE$, $\Delta ABE$, $\Delta BEC$ đồng dạng với nhau từng đôi một (Lưu ý viết các điình của hai tam giác đồng dạng theo thứ tự tương ứng với nhau).

**Bài tập 5.** Cho $\Delta ABC$. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$. Kẻ DE song song với AC ($E \in AB$). Gọi M là trung điểm của AD. Gọi F là giao điểm của EM và AC.

a. $\Delta BED$ đồng dạng với tam giác nào trong hình ? Tìm tỉ số đồng dạng.

b. $\Delta ADE$ đồng dạng với tam giác nào trong hình ? Tìm tỉ số đồng dạng.

**Bài tập 6.** (*Tính chất đường trung bình của tam giác*): Cho $\Delta ABC$. Một đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự ở D và E. Biết rằng $DE = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng D là trung điểm của AB.

**Bài tập 7.** (*Định lí Mênêlai*): Cho $\Delta ABC$. Một đường thẳng d không đi qua các đỉnh của tam giác, cắt các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự ở $A_1$, $B_1$, $C_1$.

Chứng minh rằng: $\frac{AB_1}{B_1C}.\frac{CA_1}{A_1B}.\frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

**Bài tập 8.** (*Định lí Xêva*): Cho $\Delta ABC$. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy.

Chứng minh rằng: $\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A} = 1$.

## V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. $A_1B_1 = 5cm$, $A_1C_1 = 7,5cm$.

b. $A_1B_1 = \frac{2}{3}cm$, $B_1C_1 = \frac{4}{3}cm$, $A_1C_1 = 1cm$.

**Bài tập 2.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 3.** Gọi $CV_1CV_2$ theo thứ tự là chu vi của $\Delta ABC$ và $\Delta DEF$

a. $\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3}$.

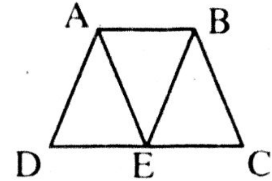
b. Ta có ngay: $CV_2 = \frac{3}{2}CV_1 = 45cm$.

c. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{CV_2 - CV_1} = \frac{2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{20} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow CV_1 = 40cm.$$

Khi đó, ta có $CV_2 = 60cm$.

**Bài tập 4.** Với giả thiết E là trung điểm CD ta lần lượt có:




- Vì: $AB \overset{//}{=} DE \Leftrightarrow ABED$ là hình bình hành

  $\Rightarrow AD = BE$

  Khi đó, ta nhận được $\Delta ADE \backsim \Delta EBA$. (1)

- Vì: $AB \overset{//}{=} EC \Leftrightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = BC$

  Khi đó, ta nhận được $\Delta EBA \backsim \Delta BEC$. (2)

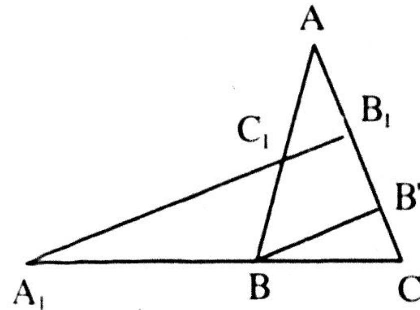
  Ngoài ra từ (1) và (2), ta nhận them được $\Delta ADE \backsim \Delta BEC$.

**Bài tập 5.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 6.** *Học sinh tự vẽ hình.*

Ta có ngay: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ D là trung điểm của AB.

**Bài tập 7.** Kẻ $BB' // A_1B_1$, với $B' \in AC$.




Khi đó: $\frac{AB_1}{B_1C}.\frac{CA_1}{A_1B}.\frac{BC_1}{C_1A}$

$$= \frac{AB_1}{B_1B'}.\frac{B_1B'}{B_1C}.\frac{CA_1}{A_1B}.\frac{BC_1}{C_1A}$$

$$= \frac{AC_1}{C_1B}.\frac{A_1B}{A_1C}.\frac{CA_1}{A_1B}.\frac{BC_1}{C_1A} = 1, \text{đpcm}.$$

Trường hợp đồng dạng **1** **BA CẠNH TỈ LỆ**

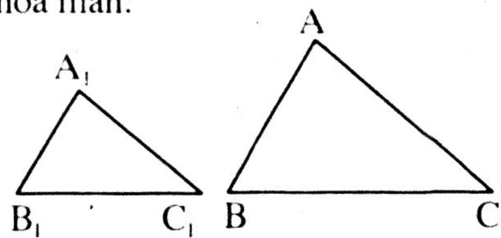
## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH LÍ

> ***Định lí***: *Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$$

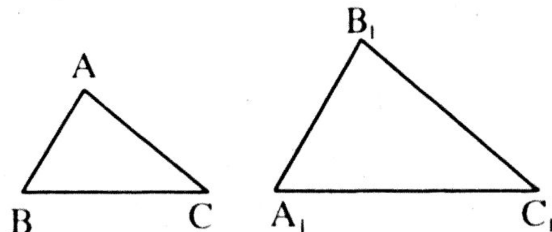



$\Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$

và khi đó ta có ngay: $\hat{A}_1 = \hat{A}, \hat{B}_1 = \hat{B}, \hat{C}_1 = \hat{C}$.

**Thí dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại $B_1$ có $A_1B_1$ = 6cm, $B_1C_1$ = 8cm. Hỏi rằng hai tam giác vuông $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?

*Giải*




Trong $\Delta ABC$ vuông tại A, ta có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - 9 = 16$

$\Leftrightarrow AC = 4cm$.

Trong $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại $B_1$, ta có:

$$A_1C_1^2 = A_1B_1^2 + C_1B_1^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow A_1C_1 = 10cm.$$

Nhận xét rằng: $\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

$$\Rightarrow \frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1 \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$

**Nhận xét:**

1. Vì $\Delta ABC$ vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại $B_1$ nên nếu hai tam giác này đồng dạng thì không thể có tương ứng $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ bởi ta có $\hat{A} = \hat{B}_1 = 90^0$ do đó tương ứng sẽ phải xuất phát từ $A \to B_1$.
2. Trong lời giải trên, trước tiên chúng ta đi xác định độ dài các cạnh còn lại của hai tam giác dựa trên định lí Pitago,

sau đó bằng việc đánh giác được tỉ số giữa các cạnh tương ứng bằng $\frac{1}{2}$, ta khẳng định được $\Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1$ với tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

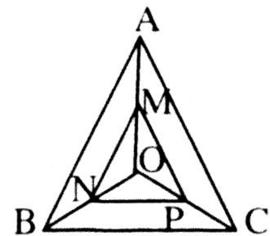
## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$, điểm O ở bên trong tam giác. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC.

a. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ đồng dạng với $\Delta MNP$.

b. Tính chu vi của $\Delta MNP$ biết chi vi của $\Delta ABC$ bằng 88cm.

*Giải*




a. Trong $\Delta OAB$, ta có: $\begin{cases} OM = AM \\ ON = BN \end{cases}$

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.

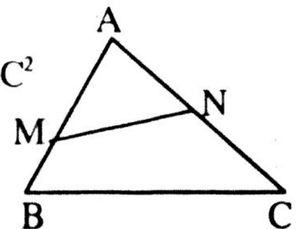
Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$.

Vậy ta được: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta MNP \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

b. Ta có ngay: $\frac{CV_{\Delta MNP}}{CV_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}CV_{\Delta ABC} = 44cm$.

**Ví dụ 2:** Cho $\Delta ABC$, biết AB = 6cm, BC = 10cm, CA = 8cm. Trên AB lấy điểm M sao cho AM = 4cm, trên AC lấy điểm N sao cho AN = 3cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ đồng dạng với $\Delta ANM$.

*Giải*




Trong $\Delta ABC$, ta có nhận xét: $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Trong $\Delta AMN$ vuông tại A, ta có:

$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow MN = 5cm$.

Nhận xét rằng: $\frac{AN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{NM}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{MA}{CA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{NM}{BC} = \frac{MA}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta ANM \backsim \Delta ABC$ với tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

**Chú ý:** Xuất phát từ tam giác vuông có độ dài các cạnh bằng 3cm, 4cm, 5cm và dựa trên sự đồng dạng theo tỉ số ba cạnh chúng ta sẽ tạo ra được vô số tam giác vuông có các cạnh nguyên là:

6cm , 8cm, 10cm

9cm , 12cm, 15cm

...

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lí về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.c.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu:

a. Các cặp cạnh góc vuông tỉ lệ ?

b. Một cặp cạnh góc vuông và cặp cạnh huyền tỉ lệ ?

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Hai tam giác sau có đồng dạng không nếu độ dài các cạnh của chúng bằng:

a. 8cm, 12cm, 18cm và 27cm, 18cm, 12cm.

b. 3cm, 4cm, 6cm và 9cm, 15cm, 18cm.

**Bài tập 2.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A có AB = 3cm, AC = 4cm và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại $A_1$ có $A_1B_1$ = 9cm, $B_1C_1$ = 15cm. Hỏi rằng hai tam giác vuông $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?

**Bài tập 3.** Tứ giác ABCD có AB = 4cm, BC = 20cm, CD = 25cm, DA = 8cm, đường chéo BD = 10cm.

a. Các $\Delta ABD$ và $\Delta BDC$ có đồng dạng không ?

b. Chứng minh rằng AB song song với CD.

**Bài tập 4.** Cho $\Delta ABC$ có trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của GA, GB, GC.

a. Chứng minh rằng $\Delta MNP$ đồng dạng với $\Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

b. Tính chu vi của $\Delta ABC$ biết chu vi của $\Delta MNP$ bằng 18cm.

**Bài tập 5.** Cho $\Delta ABC$ có trực tâm H. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC.

a. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ đồng dạng với $\Delta MNP$ với tỉ số đồng dạng k = 2.

b. Tính chu vi của $\Delta MNP$ biết chu vi của $\Delta ABC$ bằng 78cm.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. Hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

b. Hai tam giác không đồng dạng.

**Bài tập 2.** Hai tam giác vuông này có đồng dạng.

Thật vậy:

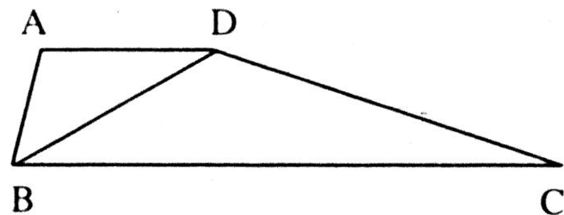
- Trong $\Delta ABC$, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5cm$.
- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

  $A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow A_1C_1 = 12cm$.

  Khi đó, nhận thấy rằng:

  $\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1$ với tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

**Bài tập 3.**




a. Nhận xét rằng:

$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$ với tỉ số $k = \frac{2}{5}$.

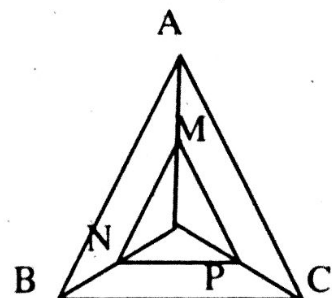
b. Dựa trên kết quả của câu a), ta có ngay:

$\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Leftrightarrow AB // CD$ vì có hai góc so le trong bằng nhau.

**Bài tập 4.**

a. Trong $\Delta GAB$, ta có: $\begin{cases} GM = AM \\ GN = BN \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$.




Vậy ta được: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta MNP \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

b. Ta có ngay: $\frac{CV_{\Delta MNP}}{CV_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\Delta ABC} = 2CV_{\Delta MNP} = 36cm$.

**Bài tập 5.** *Làm tương tự như trong bài tập 4.*

Đáp số: $CV_{\Delta MNP} = 39cm$.

| Trường hợp đồng dạng 2 | HAI CẠNH VÀ GÓC XEN GIỮA |
|---|---|

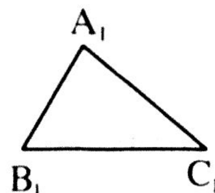
## I. PHƯƠNG PHÁP

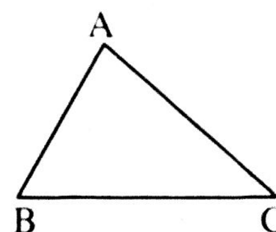
### 1. ĐỊNH LÍ

> ***Định lí**: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$



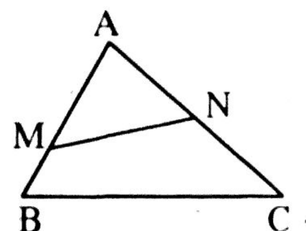

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{B}, \widehat{C_1} = \widehat{C} \\ \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}.$$

**Thí dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 10cm. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho AN = 8cm.

a. Tam giác $\Delta AMN$ đồng dạng với tam giác nào ?

b. Tính độ dài đoạn MN.




*Giải*

a. Với hai tam giác $\Delta AMN$ và $\Delta ABC$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \dfrac{2}{3}.$$

b. Theo câu a), ta có ngay: $\dfrac{MN}{CB} = \dfrac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN = \dfrac{AM.CB}{AC} = 12cm.$

Vậy, ta được MN = 12cm.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

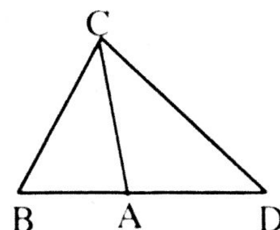
**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ có AB = 4cm, AC = 5cm, BC = 6cm. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = 5cm.

a. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác nào ?

b. Tính độ dài CD.

c. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$.

*Giải*




a. Với hai tam giác ΔABC và ΔCBD, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{B} \text{ chung} \\ \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \text{ và } \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{6}{4+5} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta CBD.$$

b. Từ kết quả câu a), ta có: $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB}{CB} \Leftrightarrow CD = \dfrac{AC.CB}{AB} = 7{,}5$cm.

Vậy, ta được CD = 7,5cm.

c. Từ kết quả câu a), ta có ngay: $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}$.

Nhận xét rằng: $\dfrac{BA}{DA} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{6}{7{,}5} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{DA} = \dfrac{BC}{DC} \Leftrightarrow$ CA là đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$

$\Leftrightarrow \widehat{BCD} = 2\widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$.

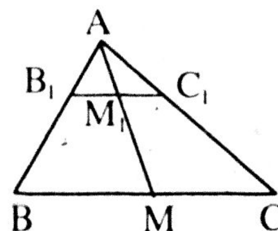
**Ví dụ 2:** Dựng ΔABC biết $\widehat{A} = 60^0$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$ và trung tuyến AM = 3cm.

*Giải*

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Với điểm $M_1$ bất kỳ trên AM, dựng đường thẳng song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại $B_1C_1$, ta có:

$AM_1$ là trung tuyến của $\Delta AB_1C_1$: $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$.




***Cách dựng***: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng góc $\widehat{xAy} = 60^0$.
- Trên Ax lấy điểm $B_1$ bất kỳ, trên Ay lấy điểm $C_1$ sao cho $AC_1 = 2AB_1$.
- Gọi $M_1$ là trung điểm $B_1C_1$, trên tia $AM_1$ lấy điểm M sao cho AM = 3cm.
- Qua M dựng đường thẳng song song với $B_1C_1$, cắt $AB_1$ và $AC_1$ thứ tự tại B và C.

Khi đó, ΔABC là tam giác phải dựng.

***Chứng minh***: Vì BC // $B_1C_1$ nên: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BM}{B_1M_1} = \dfrac{AM}{AM_1} = \dfrac{MC}{M_1C_1} \\ B_1M_1 = C_1M_1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ BM = MC.

***Biện luận***: Bài toán có một nghiệm hình.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lí về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.g.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu có các cặp cạnh góc vuông tỉ lệ ?

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho ΔABC có AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 12cm. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 5cm. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho AN = 4cm.

a. Tam giác ΔAMN đồng dạng với tam giác nào ?

b. Tính độ dài đoạn MN.

**Bài tập 2.** Cho ΔABC có AB = 10cm, AC = 20cm. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = 2,5cm. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = 5cm.

a. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác nào ?

b. Chứng minh rằng $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$.

c. Tính độ dài DE, biết BE = 8cm.

**Bài tập 3.** Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^0$). Trên Ox lấy hai điểm A, B sao cho OA = 3cm, OB = 6cm. Trên Oy lấy hai điểm C, D sao cho OC = 4cm, OD = 8cm.

a. Chứng minh rằng hai tam giác ΔOAD và ΔOCB đồng dạng.

b. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng hai tam giác ΔIAB và ΔICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

**Bài tập 4.** Cho hai tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh rằng:

a. Tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

b. Tỉ số của hai đường cao tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

c. Tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

**Bài tập 5.** Dựng ΔABC biết:

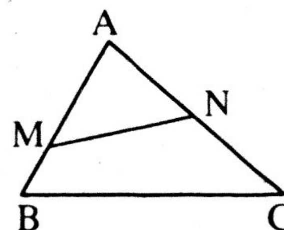
a. $\widehat{A} = 90^0$, $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ và trung tuyến AM = 4cm.

b. $\widehat{A} = 60^0$, $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ và đường cao AH = 3cm.

c. $\widehat{A} = 30^0$, $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ và phân giác AD = 5cm.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**



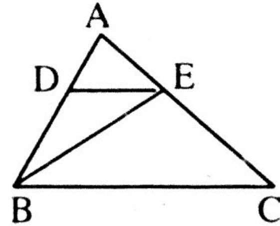

a. Với hai tam giác ΔAMN và ΔABC, ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{1}{2} \text{ và } \dfrac{AN}{AB}=\dfrac{1}{2}\\ \widehat{A} \text{ chung}\end{cases} \Leftrightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k=\dfrac{1}{2}.$$

b. Theo câu a), ta có ngay: $\dfrac{MN}{CB}=\dfrac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN=\dfrac{AM.CB}{AC}=6cm.$

Vậy, ta được MN = 6cm.

**Bài tập 2.**




a. Ta lần lượt có nhận xét: $\begin{cases}\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{4} \text{ và } \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{4}\\ \widehat{A} \text{ chung}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k=\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{cases}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2} \text{ vµ } \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{2}\\ \widehat{A} \text{ chung}\end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB \text{ với tỉ số đồng dạng } k=\dfrac{1}{2}.$$

b. Theo kết quả: $\Delta ABE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{ACB}$.

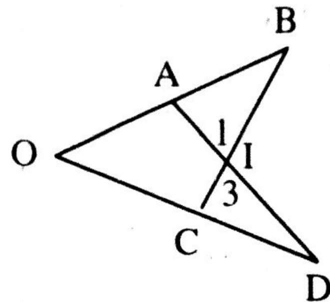
c. Theo các kết quả câu a), ta lần lượt có:

$\Delta ABE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{BE}{CB}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow BC=16cm.$

$\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow DE=4cm.$

Vậy ta được DE = 4cm.

**Bài tập 3.**




a. Với hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{3}{4} \text{ vµ } \dfrac{OB}{OD}=\dfrac{3}{4}\\ \widehat{O} \text{ chung}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta OAD \backsim \Delta OCB$ với tỉ số đồng dạng $k=\dfrac{3}{4}$.

b. Với hai tam giác ΔIAB và ΔICD, ta có:

$\widehat{B}=\widehat{D}$, dựa theo kết quả câu a),

$\widehat{I_1}=\widehat{I_3}$, vì đối đỉnh.

$\widehat{A}=\widehat{C}$, dựa trên tính chất tổng ba góc trong tam giác bằng $180^0$.

Vậy, hai tam giác ΔIAB và ΔICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

**Bài tập 4.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 5.** Tham khảo ví dụ 2.

## Trường hợp đồng dạng 3 HAI GÓC BẰNG NHAU

## I. PHƯƠNG PHÁP

### 1. ĐỊNH LÍ

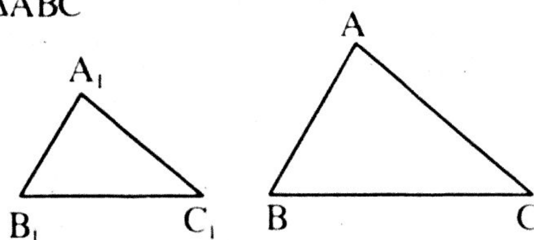
***Định lí:*** *Nếu hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\hat{A}_1 = \hat{A},\ \hat{B}_1 = \hat{B} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$

và khi đó ta có ngay:

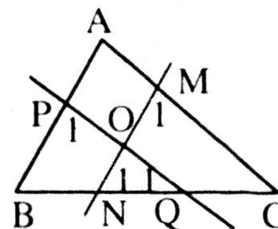
$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}.$$




**Thí dụ 1:** Cho $\Delta ABC$, O là điểm ở bên trong tam giác. Kẻ qua O đường thẳng song song với AB cắt AC, BC theo thứ tự tại M, N. Kẻ qua O đường thẳng song song với AC cắt AB, BC theo thứ tự tại P, Q. Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?

*Giải*

Vì MN // AB nên: $\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{A} \\ \hat{N}_1 = \hat{B} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta MCN \backsim \Delta ACB.$



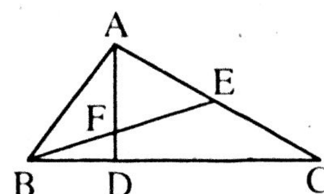

Vì PQ // AC nên: $\begin{cases} \hat{P}_1 = \hat{A} \\ \hat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta PBQ \backsim \Delta ABC.$

Ta có được: $\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{B} \\ \hat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ONQ \backsim \Delta ABC \Rightarrow \Delta ONQ \backsim \Delta PBQ.$

Vậy, ta có được bốn cặp tam giác đồng dạng.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AD, đường phân giác BE. Giả sử AD cắt BE tại F. Chứng minh rằng $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{FD}{FA}$.



*Giải*

Trong $\Delta ABD$ có BF là phân giác suy ra: $\frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA}$. (1)

Với hai tam giác $\Delta ABD$ và $\Delta CBA$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{CAB} \\ \widehat{B} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta CBA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB}. \quad (2)$$

Trong $\Delta ABC$ có BE là phân giác suy ra: $\frac{AB}{CB} = \frac{EA}{EC}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 2:** Cho hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = 5cm, BD = 10cm, AD = 7cm và $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$.

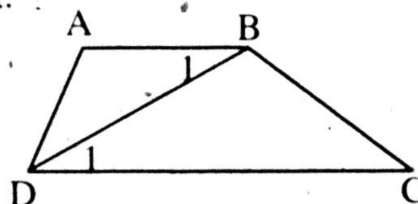
a. Chứng minh rằng $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$.

b. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, CD.

c. Hãy dựng hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

*Giải*

a. Với hai tam giác $\Delta ABD$ và $\Delta BDC$, ta có nhận xét:




$$\begin{cases} D\hat{A}B = C\hat{B}D \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CD}{DB} = \frac{DB}{BA} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} BC = 14cm \\ CD = 20cm \end{cases}.$$

Vậy ta được BC = 14cm và CD = 20cm.

c. Ta cần thực hiện theo bốn bước sau:

***Phân tích***: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài. Nhận xét rằng:

- $\Delta ABD$ dựng được ngay.
- Điểm C thuộc tia Dx song song với AB sao cho CD = 20cm.

***Cách dựng***: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $\Delta ABD$ biết độ dài ba cạnh.
- Dựng Dx // AB, trên Dx lấy điểm C sao cho CD = 20cm.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

***Chứng minh***: *Bạn đọc tự chứng minh.*

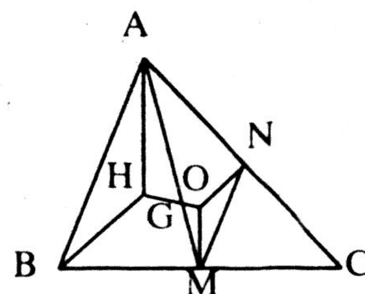
***Biện luận***: Bài toán có một nghiệm hình.

**Ví dụ 3:** Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn, các điểm M và N thứ tự là trung điểm của BC và AC. Gọi H, O, G theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của $\Delta ABC$.

a. Tìm các tam giác đồng dạng với $\Delta AHB$.

b. Chứng minh rằng $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$.

c. Chứng minh rằng ba điểm H, G, O thẳng hàng.




*Giải*

a. Ta có:

MN // AB vì MN là đường trung bình của $\Delta ABC$,

AH // MO vì cùng vuông góc với BC,

BH // NO vì cùng vuông góc với AC,

từ đó suy ra các góc có cạnh tương ứng song song bằng nhau là:

$$\begin{cases} \widehat{HAB} = \widehat{OMN} \\ \widehat{BHA} = \widehat{NOM} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta MON.$$

Vậy, ta được $\Delta AHB \backsim \Delta MON$.

b. Theo câu a) ta có: $\Delta AHB \backsim \Delta MON \Rightarrow \dfrac{AH}{MO} = \dfrac{AB}{MN} = 2$.

Mặt khác, vì G là trọng tâm của $\Delta ABC$ nên: $\dfrac{AG}{MG} = 2 = \dfrac{AH}{MO}$.

Xét hai tam giác $\Delta HAG$ và $\Delta OMG$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AH}{MO} = \dfrac{AG}{MG} \\ \widehat{HAG} = \widehat{OMG} \text{ so le trong} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta HAG \backsim \Delta OMG.$$

c. Theo câu b) ta có: $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$.

• Mặt khác, ta có: $180^0 = \widehat{MGO} + \widehat{AGO} = \widehat{AGH} + \widehat{AGO}$

$\Rightarrow$ H, G, O thẳng hàng.

**Nhận xét:** Kết quả câu c) khẳng định " *Trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác nằm trên một đường thẳng (đường thẳng ơle)* ", trong đó khoảng cách từ trọng tâm đến trực tâm gấp đôi khoảng cách từ trọng tâm đến giao điểm ba đường trung trực.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định lí về sự đồng dạng của hai tam giác trong trường hợp c.g.c. Cho ví dụ.

**Câu hỏi 2:** Hỏi hai tam giác vuông có đồng dạng với nhau không nếu có một cặp góc nhọn bằng nhau ?

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho ΔABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng:

a. ΔABD ∽ ΔACE. b. ΔADE ∽ ΔABC.

**Bài tập 2.** Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H hạ HK vuông góc với AC. Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?

**Bài tập 3.** Cho hai tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh rằng:

a. Tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

b. Tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

**Bài tập 4.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng ΔADE ∽ ΔCBF.

**Bài tập 5.** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Chứng minh rằng OA.OD = OB.OC.

b. Đường thẳng qua O vuông góc với AB và cắt AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh rằng OH.CD = OK.AB.

**Bài tập 6.** Cho ΔABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Tính độ dài AB biết AC = 9cm, BC = 12cm.

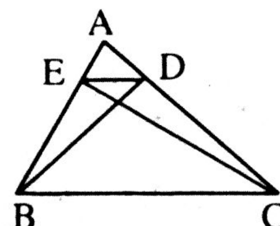
**Bài tập 7.** Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, điểm E thuộc cạnh AD. Biết AB = 10cm, AE = 15cm, DE = 12cm và $\widehat{AEB} = \widehat{BCD}$.

a. Trong hình vẽ đó hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng.

b. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**




a. Với hai tam giác ΔABD vàΔACE, ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0 \\ \hat{A} \text{ chung}\end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta ACE, \text{ đpcm.}$$

b. Từ kết quả câu a), ta được: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

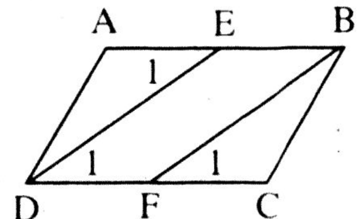
Khi đó, với hai tam giác ΔADE và ΔABC: $\begin{cases} \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ΔADE ∽ ΔABC, đpcm.

**Bài tập 2.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 3.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 4.** Dựa trên tính chất song song của hình bình hành, ta có:




$\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$, vì so le trong.

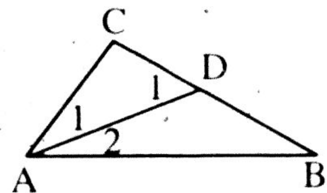
$\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$, vì đồng vị. $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F_1}$.

Khi đó, với hai tam giác ΔADE vàΔCBF, ta có nhận xét:

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = F_1 \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔADE ∽ ΔCBF, đpcm.

**Bài tập 5.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 6.** Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

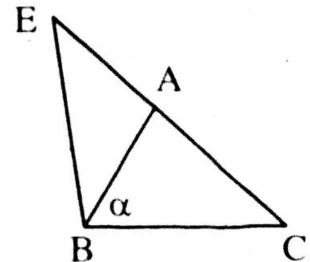



*Cách 1*: Gọi AD là tia phân giác góc $\hat{A}$, suy ra:

- Với hai tam giác ΔACD vàΔBCA, ta có nhận xét:

$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} = \dfrac{\hat{A}}{2} \\ \hat{C} \text{chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \dfrac{27}{4}\text{cm}.$

- Theo tính chất đường phân giác:




$\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{AC.BD}{CD} = \dfrac{AC.(BC - CD)}{CD} = 7\text{cm}.$

Vậy, ta được AB = 7cm.

*Cách 2*: Trên tia đối của tia AC lấy E sao cho AE = AB.

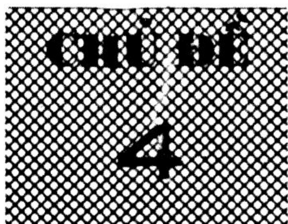
Đặt $\hat{B} = \alpha$ thì $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{E} = \widehat{ABE} = \alpha$.

Đặt AB = AE = x.

Với hai tam giác ΔABC vàΔBEC, ta có: $\begin{cases} \hat{A} = \widehat{CBE} \\ \widehat{ABC} = \hat{E} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta BEC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{EC} \Rightarrow \dfrac{9}{12} = \dfrac{12}{x + 9} \Rightarrow x = 7\text{cm}.$

Vậy, ta được AB = 7cm.




# CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

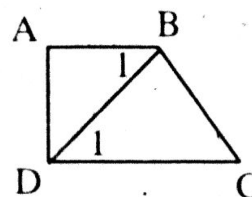
### 1. ÁP DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

Từ các trường hợp đồng dạng của tam giác, ta suy ra *hai tam giác vuông đồng dạng với nhau* nếu:

1. *Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.*
   Thật vậy, khi đó vì chúng luôn có thêm hai góc vuông bằng nhau, nên chúng có hai góc bằng nhau.
2. *Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.*
   Thật vậy, khi đó chúng có thêm hai cạng huyền tỉ lệ (dựa trên định lí Pi-ta-go).

**Thí dụ 1:** Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AB = 4cm, CD = 9cm. Tính độ dài BD biết bằng BD vuông góc với BC.

*Giải*




Xét hai tam giác vuông ΔABD và ΔBDC có:

$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{BD} \Leftrightarrow BD^2 = AB.DC = 4.9 = 36 \Leftrightarrow BD = 6cm.$

Vậy, ta được BD = 6cm.

**Nhận xét:** Như vậy, bằng việc đánh giác được $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (góc nhọn trong tam giác vuông) chúng ta có ngay được kết luận $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$, từ đó dựa trên tỉ số đồng dạng giữa các cạnh chúng ta tính được độ dài cạnh BD. Thí dụ tiếp theo, minh hoạ việc sử dụng trường hợp thứ hai (hai cạnh góc vuông tỉ lệ)

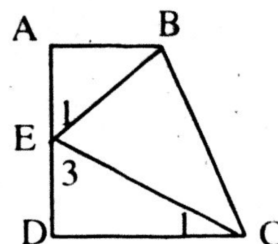
**Thí dụ 2:** Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AB = 6cm, CD = 12cm, AD = 17cm. Lấy điểm E trên canh AD sao cho AE = 8cm.

a. Hỏi ΔABE đồng dạng với tam giác nào ? Vì sao ?

b. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

*Giải*

a. Xét hai tam giác vuông ΔABE và ΔDEC, ta có:




$$\begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{AE}{DC} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Theo kết quả câu a), ta suy ra: $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$.

Mặt khác, trong ΔCDE vuông tại D, ta có: $\hat{C}_1 + \widehat{E_3} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 90^0$.

Khi đó: $\widehat{BEC} = 180^0 - \widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

**Nhân xét**: Như vậy, bằng việc đánh giác được $\frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC}$ (hai cạnh góc vuông tỉ lệ) chúng ta có ngay được kết luận ΔABD ∽ ΔBDC, từ đó dựa sự bằng nhau giữa các góc chúng ta tính được số đo của góc $\widehat{BEC}$ - *Các em học sinh cần nhớ rằng trong bài kiểm tra thông thường câu a) không được đề cập,* điều này dẫn tới việc các em cần có được định hướng chính xác công việc cần thực hiện, cụ thể:

- Để chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$ ta cần chứng minh:
  $$\widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 90^0.$$
- Nhận xét rằng $\widehat{E_1}$ và $\widehat{E_3}$ là hai góc nhọn trong hai tam giác vuông, do vậy nếu có $\widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 90^0$ thì $\hat{E}_1 = \widehat{C_1}$, tức là khi đó hai tam giác vuông nay đồng dạng.
- Từ đó, chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc chứng minh ΔABD ∽ ΔBDC.

Tuy nhiên, với chỉ một yêu cầu chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$, ta có thể sử dụng cách khác như sau:

Hạ BH ⊥ CD, suy ra ABHD là hình chữ nhật, do đó:

BH = AD = 17cm,

CH = CD – DH = CD – AB = 12 – 6 = 6cm.

Trong ΔBHC vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 289 + 36 = 325. \quad (1)$$

Trong ΔABE vuông tại A, ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 36 + 64 = 100. \quad (2)$$

Trong ΔCDE vuông tại D, ta có:

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 144 + 81 = 225. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 \Leftrightarrow \Delta\, BCE \text{ vuông tại E}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BEC} = 90^0.$$

## 2. DẤU HIỆU ĐẶC BIỆT NHẬN BIẾT HAI TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG

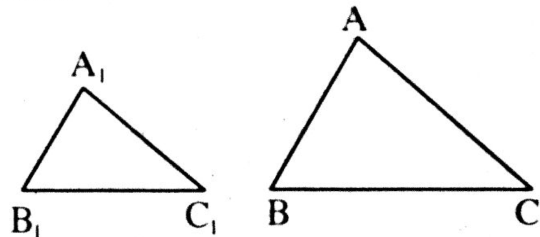
***Định lí**: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác vuông $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 = \widehat{C} \text{ và } \widehat{B}_1 = \widehat{B} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}. \end{cases}$$




**Chú ý:** Kết quả của định lí trên được chứng minh một cách khác đơn giản dựa vào định lí Pi - ta - go, thật vậy:

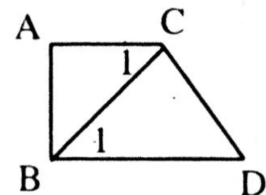
Nếu có: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = k$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{\sqrt{B_1C_1^2 - A_1B_1^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = \frac{\sqrt{k^2BC^2 - ^2AB^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = k$$

**Thí dụ 3:** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AC = 8cm, BC = 12cm. Kẻ tia Cx vuông góc với BC. Trên Cx lấy điểm D sao cho BD = 18cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta CDB$.

*Giải*

Xét hai tam giác vuông $\Delta ABC$ và $\Delta CDB$, ta có:




$$\begin{cases} \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta CDB.$$

**Nhận xét:** Từ kết quả: $\Delta ABD \backsim \Delta BDC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Leftrightarrow AC \,//\, BD$

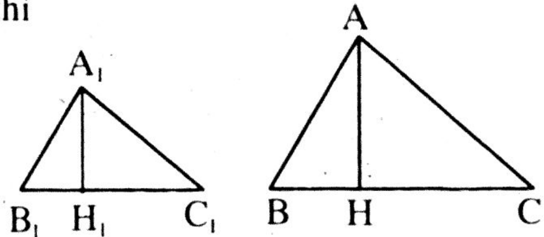
$\Rightarrow$ ABDC là hình thang vuông.

### 3. TỈ SỐ HAI ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

> ***Định lí**: Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.*

Như vậy, nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k thì

$$\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$$




và khi đó ta có thêm:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1H_1}{AH} = \dfrac{B_1H_1}{BH} = \dfrac{C_1H_1}{CH} \\ \widehat{B_1A_1H_1} = \widehat{BAH} \text{ vµ } \widehat{C_1A_1H_1} = \widehat{CAH} \end{cases}.$$

> ***Định lí**: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

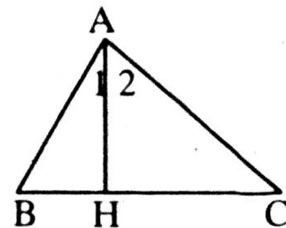
Như vậy, nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k thì: $\dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng:

a. $AH^2 = BH.CH$. b. $AB^2 = BH.BC$. c. $AC^2 = CH.BC$.

*Áp dụng*: Đường cao của một tam giác vuông phát xuất từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài 9cm và 16cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.




*Giải*

a. Xét hai tam giác vuông $\Delta AHB$ và $\Delta CHA$, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA \Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{HB}{HA} \Leftrightarrow AH^2 = BH.CH.$

b. Xét hai tam giác vuông $\Delta AHB$ và $\Delta CAB$, ta có: $\hat{B}$ góc nhọn chung

$\Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{HB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BH.BC.$

c. Xét hai tam giác vuông $\Delta AHC$ và $\Delta BAC$, ta có: $\hat{C}$ góc nhọn chung

$\Leftrightarrow \Delta AHC \backsim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{HC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = CH.BC.$

*Áp dụng*: Ta có BH = 9cm, CH = 16cm suy ra:

$AB^2 = BH.BC = 9.(16 + 9) = 225 \Rightarrow AB = 15cm.$

$AC^2 = CH.BC = 16.(16 + 9) = 400 \Rightarrow AC = 20cm.$

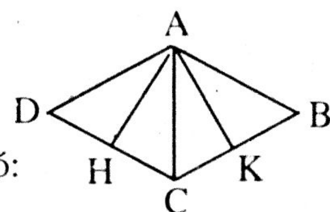
Vậy, ta được AB = 15cm, AC = 20cm.

**Chú ý:** Các em học sinh cần nhớ những công thức được xác lập trong ví dụ này, bởi chúng ta được quyền sử dụng nó trong các bài toán tính toán của tam giác vuông.

**Ví dụ 2:** Cho hình bình hành ABCD. Gọi hình chiếu của A trên CD là H, hình chiếu của A trên BC là K.

a. Chứng minh rằng $\Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

b. Hình bình hành ABCD có thêm điều kiện gì thì các tam giác AHC và AKC đồng dạng với nhau ?




*Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Xét hai tam giác vuông $\Delta AHD$ và $\Delta AKB$, ta có:

$\widehat{D} = \widehat{B}$ (góc đối hình bình hành) $\Leftrightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

*Cách 2*: Ta có: $S_{ABCD} = AH.CD = AH.AB = AK.BC = AK.AD$

$\Leftrightarrow AH.AB = AK.AD \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AH}{AK}$.

Xét hai tam giác vuông $\Delta AHD$ và $\Delta AKB$, ta có:

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AH}{AK} \Leftrightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

b. Các tam giác vuông AHC, AKC đồng dạng với nhau khi và chỉ khi có một cặp góc nhọn bằng nhau, xét hai khả năng:

*Khả năng 1*: Với điều kiện: $\widehat{ACH} = \widehat{ACK} \Leftrightarrow$ AC là phân giác của góc $\widehat{C}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình thoi.

*Khả năng 2*: Với điều kiện: $\widehat{ACH} = \widehat{CAK} \Leftrightarrow AK // CD \Leftrightarrow CK \perp CD$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông suy từ các trường hợp đồng dạng của tam giác.

**Câu hỏi 2:** Phát biểu các trường hợp đồng dạng đặc biệt của tam giác vuông.

**Câu hỏi 3:** Hai tam giác vuông cân có đồng dạng với nhau không? Tại sao? Nếu cạnh huyền của tam giác vuông cân này gấp đôi cạnh huyền của tam giác vuông cân khác thì tỉ số diện tích của chúng bằng bao nhiêu?

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AC = 4cm, BC = 6cm. Kẻ tia Cx vuông góc với BC. Trên Cx lấy điểm D sao cho BD = 9cm. Chứng minh rằng $\Delta ABC \backsim \Delta CDB$.

**Bài tập 2.** Cho $\Delta ABC$ có AB = AC = 32cm, BC = 24cm, đường cao BK. Tính độ dài CK.

**Bài tập 3.** Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, điểm E thuộc cạnh AD. Biết AB = 6cm, BE = 10cm, CE = 15cm. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

**Bài tập 4.** Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$. AB = 3cm, CD = 6cm, AD = 11cm. Lấy điểm E trên canh AD sao cho DE = 9cm.

a. Hỏi $\Delta ABE$ đồng dạng với tam giác nào ? Vì sao ?

b. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

**Bài tập 5.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết AB = 12cm, BC = 20cm. Tính độ dài các đoạn BH, CH.

**Bài tập 6.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết BH = 25cm, CH = 36cm.

a. Tính độ dài các cạnh của $\Delta ABC$.

b. Tính chu vi và diện tích của $\Delta ABC$.

**Bài tập 7.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết BH = 4cm, CH = 6cm. Gọi M là trung điểm của BC.

a. Tính độ dài các cạnh của $\Delta ABC$. b. Tính diện tích $\Delta AHM$.

**Bài tập 8.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, AB = 9cm, AC = 12cm. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho CD = 4cm. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E. Không tính độ dài DE, hãy tính diện tích $\Delta DEC$.

**Bài tập 9.** Cho $\Delta ABC$ cân tại A, đường cao BH và tam giác A'B'C' cân tại A', đường cao B'H'. Biết AB = 12cm, BH = 9cm, A'B' = 8cm, B'H' = 6cm. Tính tỉ số diện tích của các tam giác $\Delta B'H'C'$ và $\Delta BHC$.

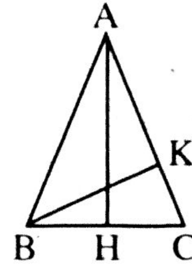
**Bài tập 10.** Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn, BC = 15cm, đường cao AH = 10cm. Tính cạnh hình vuông MNPQ biết M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC.

**Bài tập 11.** Cho $\Delta ABC$, điểm D thuộc cạnh BC. Vẽ DM song song với AC ($M \in AB$), DN song song với AB ($N \in AC$). Biết $S_{BMD} = a^2$, $S_{DNC} = b^2$. Chứng minh rằng $S_{ABC} = (a+b)^2$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 2.** Hạ đường cao AH.



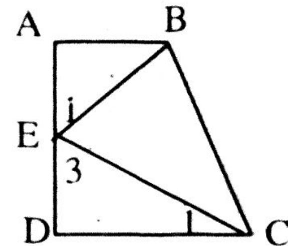

Xét hai tam giác vuông ΔAHC và ΔBKC, ta có: $\hat{C}$ chung

suy ra: $\Delta AHC \backsim \Delta BKC \Leftrightarrow \dfrac{HC}{KC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow KC = 9cm.$

Vậy ta tìm được KC = 9cm.

**Bài tập 3.** *Tham khảo thí dụ 2.*

**Bài tập 4.**




a. Xét hai tam giác vuông ΔABE và ΔDEC, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{AE}{DC} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AE}{DC} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Theo kết quả câu a), ta suy ra: $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$.

Mặt khác, trong ΔCDE vuông tại D, ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{E_3} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 90^0$.

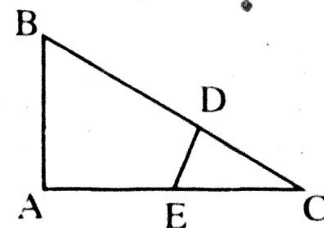
Khi đó: $\widehat{BEC} = 180^0 - \widehat{E_1} + \widehat{E_3} = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

**Bài tập 5.** *Sử dụng công thức trong ví dụ 1.*

**Bài tập 6.** *Sử dụng công thức trong ví dụ 1.*

**Bài tập 7.** *Sử dụng công thức trong ví dụ 1.*

**Bài tập 8.** Xét hai tam giác vuông ΔDCE và ΔACB, ta có: $\hat{C}$ chung



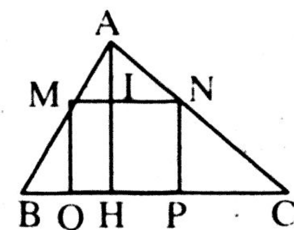

suy ra: $\Delta DCE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta DCE}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\dfrac{CD}{AC}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow S_{\Delta DCE} = \dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{2}AB.AC = 6cm^2.$

Vậy, ta nhận được $S_{\Delta DCE} = 6cm^2$.

**Bài tập 9.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 10.** Giả sử AH cắt MN tại I và hình vuông MNPQ có cạnh bằng x, tức là: MN = IH = x.




Vì MN // BC nên $\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$. (1)

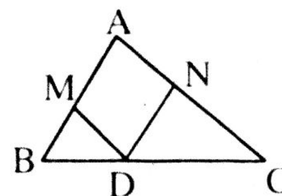
Xét hai tam giác vuông ΔAMI và ΔABH, ta có: $\hat{B}$ chung

suy ra: $\Delta AMI \backsim \Delta ABH \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AI}{AH}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AH - IH}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{x}{15} = \dfrac{10 - x}{10} \Leftrightarrow x = 6cm.$

Vậy, hình vuông MNPQ có độ dài cạnh bằng 6cm.

**Bài tập 11.** Giả sử $\Delta ABC$ có diện tích là S.




Ta thấy ngay: $\Delta BDM \backsim \Delta DCN$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta DCN}} = \left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{a}{b + a} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{a}{a + b}$$

Vì DM // AC nên $\Delta BDM \backsim \Delta BCA$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta BCA}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow S = S_{\Delta BDM}.\frac{BC}{BD} = a^2.\left(\frac{a + b}{a}\right)^2 = (a + b)^2$$



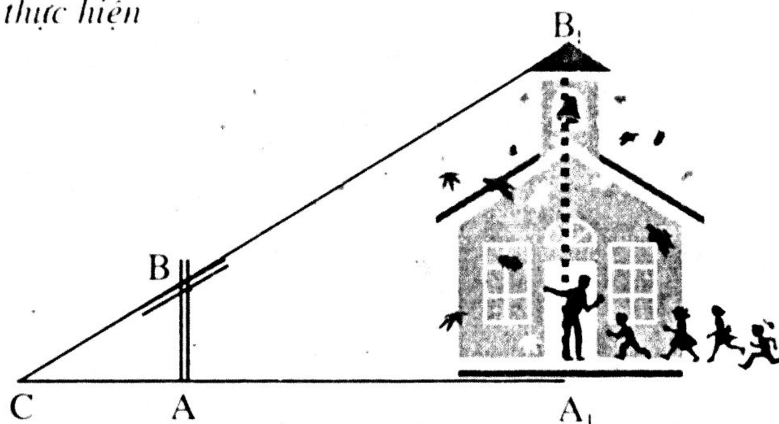

# ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐO GIÁN TIẾP CHIỀU CAO CỦA VẬT

| ***Bài toán**: Xác định chiều cao của của một vật (toà nhà).* |
|---|

*Phương pháp thực hiện*




Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:

*Bước 1*: Tiến hành đo đạc

- Đặt cọc AB thẳng đứng trên đó có gắn một thước ngắm quay được quanh một cái chốt của cọc.
- Điều chỉnh thước ngắm sao cho hướng của thước đi qua đỉnh $B_1$ của toà nhà, sau đó xác định giao điểm C của đường thẳng $AA_1$ với $BB_1$.
- Đo khoảng cách AC, $AA_1$.

*Bước 2*: Tính chiều cao

Ta có: $\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC} \Leftrightarrow A_1B_1 = \frac{A_1C.AB}{AC}$.

***Thí dụ áp dụng***: Nếu ta nhận được số đo của $A_1C = 7.5m$; $AB = 1m$; $AC = 1.5m$

suy ra: $A_1B_1 = \frac{7.5.1}{1.5} = 5m$.

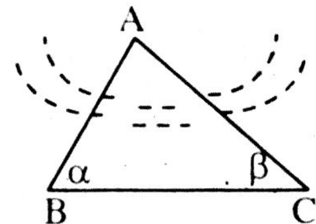
Vậy, toà nhà có độ cao 5m.

## 2. ĐO KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐỊA ĐIỂM TRONG ĐÓ CÓ MỘT ĐỊA ĐIỂM KHÔNG THỂ TỚI ĐƯỢC

| **Bài toán**: *Xác định khoảng cách AB, trong đó địa điểm A không thể tới được.* |
|---|

*Phương pháp thực hiện*

Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:




*Bước 1*: Tiến hành đo đạc

- Chọn một khoảng bằng phẳng rồi vạch một đoạn BC và đo độ dài của nó (giả sử BC = a).
- Dùng thước đo góc, đo các góc $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$.

*Bước 2*: Tính khoảng cách AB

Thực hiện vẽ trên giấy $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn $B_1C_1 = a_1$, $\widehat{A_1B_1C_1} = \alpha$, $\widehat{A_1C_1B_1} = \beta$.

Nhận xét rằng: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow AB = \frac{A_1B_1.BC}{B_1C_1}$.

***Thí dụ áp dụng***: Nếu ta nhận được số đo của:

$A_1B_1 = 12cm$; $B_1C_1 = 3cm$; $BC = 15m$

suy ra: $AB = \frac{12.1500}{3} = 6000cm = 60m$.

Vậy, khoảng cách AB = 60m.

# II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nêu phương pháp thực hiện việc đo chiều cao của của một vật (toà nhà).

**Câu hỏi 2:** Nêu phương pháp thực hiện việc xác định khoảng cách AB, trong đó địa điểm A không thể tới được.

## III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1:** Tính khoảng cách từ người quan sát đến chân tháp truyền hình cao 50m biết rằng khi người đó đặt một que dài 5cm thẳng phía trước cách mắt 40cm thì que vừa vặn che lấp tháp truyền hình.

**Bài tập 2:** Một người đo chiều cao của một cây nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao 2m và đặt xa cây 15m. Sau khi lùi cách cọc 0,8m, người ấy nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1,6m.

**Bài tập 3:** Để đo khoảng cách từ địa điểm A đến địa điểm M trên đảo (h.105), người ta gióng đường thẳng AM, lấy trên AM điểm H. Trên đường vuông góc với AM tại H, xác định địa điểm B sao cho ABM = $90^0$. Biết AH = 15m, AB = 60m. Tính độ dài AM.

## IV. HƯỚNG DẪN

**Bài tập 1.** *Bạn đọc tự vẽ hình theo lập luận trong lời giải.*

Gọi O là vị trí mắt người quan sát, AB là tháp truyền hình, A'B' là que dài 5cm, OH' và OH theo thứ tự là khoảng cách từ O đến A'B' và AB.

Ta có A'B' // AB suy ra:

$$\Delta A'OB' \backsim \Delta AOB \Leftrightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow OH = \frac{OH'.AB}{A'B'} = 400m.$$

Vậy, khoảng cách từ người quan sát đến tháp truyền hình là 400m.

**Bài tập 2.** *Bạn đọc tự vẽ hình theo lập luận trong lời giải.*

Trước hết tính BH, ta có: $\frac{DG}{BH} = \frac{EG}{EH} \Rightarrow \frac{0,4}{BH} = \frac{0,8}{15,8} \Rightarrow BH = 7,9$ (m).

Do đó: AB = 7,9 + 1,6 = 9,5m.

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

**Bài tập 1.** Cho tam giác ABC.

a. Tìm trên cạnh AB điểm M sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$. Tìm trên cạnh AC điểm N sao cho $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$.

b. Vẽ đoạn thẳng MN. Hỏi hai đường thẳng MN và BC có cắt nhau không ? Vì sao ?.

c. Cho biết chu vi và diện tích $\Delta ABC$ theo thứ tự là P và S. Tính chu vi và diện tích $\Delta AMN$.

**Bài tập 2.** Tứ giác ABCD có hai góc vuông đỉnh A và C, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, $\widehat{BAO} = \widehat{BDC}$. Chứng minh:

a. $\Delta ABO \backsim \Delta DCO$.  b. $\Delta BCO \backsim \Delta ADO$.

**Bài tập 3.** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a = 12cm, BC = b = 9cm. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD.

a. Chứng minh $\Delta AHB \backsim \Delta BCD$.

b. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

c. Tính diện tích $\Delta ABH$.

**Bài tập 4.** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng:

a. $\Delta AOB \backsim \Delta DOC$.  b. $\Delta AOD \backsim \Delta BOC$.  c. EA.ED = EB.EC.

**Bài tập 5.** $\Delta ABC$ có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Chứng minh rằng AH.DH = BH.EH = CH.FH.

**Bài tập 6.** Hai điểm M và K thứ tự nằm trên cạnh AB và BC của $\Delta ABC$, hai đoạn thẳng AK và CM cắt nhau tại điểm P. Biết rằng AP = 2PK và CP = 2PM. Chứng minh rằng: AK và CM là các trung tuyến của $\Delta ABC$.

**Bài tập 7.** Cho hình bình hành ABCD. Từ A kẻ AM vuông góc với BC, AN vuông góc với CD. Chứng minh rằng: $\Delta MAN \backsim \Delta ABC$. Biết M thuộc BC và N thuộc CD.

**Bài tập 8.** Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành ABCD. Từ C, vẽ đường vuông góc CE với đường thẳng AB, đường vuông góc CF với đường thẳng AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$. Biết rằng E và F thuộc phần kéo dài của các cạnh AB và AD.

**Bài tập 9.** $\Delta ABC$ có hai đường cao là AD và BE. Chứng minh rằng hai tam giác DEC và ABC là hai tam giác đồng dạng.

**Bài tập 10.** $\Delta ABC$ có hai trung tuyến AK và CL cắt nhau tại O. Từ một điểm P bất kì trên cạnh AC, vẽ các đường thẳng PE song song với AK, PF song song với CL. Các trung tuyến AK, CL cắt đoạn thẳng EF theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng các đoạn thẳng FM, MN, NE bằng nhau.

**Bài tập 11.** Cho $\Delta ABC$ có AB = 9cm, AC = 12cm, BC = 15cm.

a. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ là tam giác vuông.

b. Đường phân giác của góc B cắt AC tại D. Tính độ dài các đoạn AD, DC.

c. Đường cao AH cắt BD tại I. Chứng minh: $AB.BI = BH^2$.

d. Chứng minh $\Delta AID$ là tam giác cân.

**Bài tập 12.** Cho $\Delta ABC$, trung tuyến AM. Phân giác của góc ANB cắt AB tại E, phân giác của góc AMC cắt AC tại F.

a. Chứng minh EF // BC.

b. Cho biết ME = MF. Chứng minh $\Delta ABC$ là tam giác cân.

**Bài tập 13.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A có AB = 8cm, AC = 15cm, đường cao AH.

a. Tính BC, AH.

b. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

Chứng minh AM.AB = AN.AC.

**Bài tập 14.** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 18cm, AD = 12cm. Gọi E là một điểm tùy ý trên cạnh AB. Tia DE cắt tia CB tại G, cắt AC tại F.

a. Chứng minh rằng: $FD^2 = FE.FG$.

b. Tính độ dài các đoạn DE, DG, DF trong trường hợp E là trung điểm của AB.

**Bài tập 15.** Qua điểm O trong $\Delta ABC$, kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lần lượt tại M và N, kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB và BC ở F và K, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC ở M và N. Chứng minh:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

**Bài tập 16.** Cho $\Delta ABC$ (AB < AC). Đường thẳng kẻ qua trọng tâm G của tam giác cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh: $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 3$.

**Bài tập 17.** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Qua D kẻ qua đường thẳng song song với BC cắt AB tại E, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại F. CF và DE cắt BD và AC lần lượt tại M và N. Từ E và F kẻ các đường thẳng song

song với AC và BC cắt BC và AD ở P và Q. Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hang.

**Bài tập 18.** Cho hình thoi ABCD cạnh bằng a, $A = 60^0$. Một đường thẳng đi qua đỉnh C cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự ở M và N.

a. Chứng minh: $BM.DN = a^2$.

b. Chứng minh: $\Delta MBD \backsim \Delta BBN$.

**Bài tập 19.** Cho hình chữ nhật ABCD . Lấy điểm P thuộc đường chéo BD. Gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a. Tứ giác AMDB là hình gì ?

b. Gọi E và F là hình chiếu của M trên AD và AB. Chứng minh EF //AC và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c. Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật AEMF không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d. Cho $CP \perp BD$ và CP = 2,4cm; $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{9}{16}$.

Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

**Bài tập 20.** Cho $\Delta ABC$, D là trung điểm của BC, M là trung điểm của AD.

a. BM cắt AC tại P, $P_1$ là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh rằng: $PA = P_1D$ và tính tỉ số $\dfrac{PA}{PC}$ và $\dfrac{AP}{AC}$.

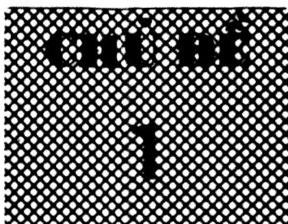
b. CM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC, tính tỉ số $\dfrac{PQ}{BC}$ và $\dfrac{PM}{MB}$.

c. Chứng minh rằng diện tích bốn tam giác BAM, BMD, CAM, CMD bằng nhau. Tính tỉ số diện tích $\Delta MAP$ và $\Delta ABC$.

# CHƯƠNG II - HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG HÌNH CHÓP ĐỀU

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được kiến thức về các khối hình đặc biệt trong không gian, cụ thể:

1. **Hình hộp chữ nhật**
2. **Hình lập phương**
3. **Hình lăng trụ đứng**
4. **Hình chóp đều**
5. **Hình chóp cụt đều**



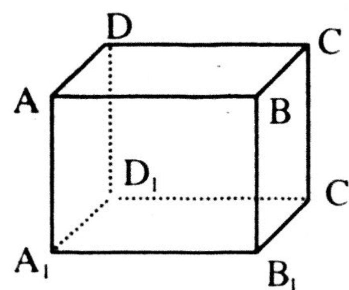

# HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa*: *Hình hộp chữ nhật* là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.**

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình hộp chữ nhật* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó:




1. Hình hộp chữ nhật có:
   - 8 đỉnh, cụ thể:
     $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.
   - 12 cạnh, cụ thể:
     $AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ – *Các cạnh đáy*
     $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ – *Các cạnh bên*
   - 6 mặt (đều là hình chữ nhật), cụ thể:
     $ABCD, A_1B_1C_1D_1, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$.
2. Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là *hai mặt đối diện* và có thể xem chúng là *hai mặt đáy* của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các *mặt bên*, cụ thể:
   - Hai mặt $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ được gọi là hai mặt đáy.
   - Bốn mặt $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$ được gọi là các mặt bên.

**Nhận xét:** Như vậy, khi cho hình hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c chúng ta cần hiểu rằng khi đó ta có: $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$.

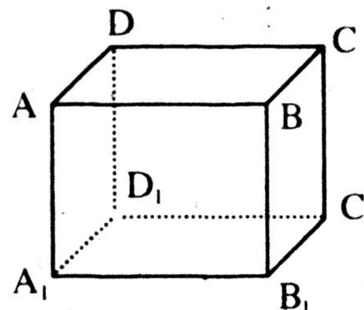
**Thí dụ 1:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng $B_1C_1$.

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng AB.

c. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

*Giải*




a. Ta có:

- Vì $BCC_1B_1$ là hình chữ nhật nên: $B_1C_1 \overset{//}{=} BC$.
- Vì $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật nên: $B_1C_1 \overset{//}{=} A_1D_1$.

- Vì $ADD_1A_1$ là hình chữ nhật nên: $AD \overset{//}{=} A_1D_1 \Rightarrow AD \overset{//}{=} B_1C_1$.

Vậy, tồn tại 3 đường thẳng là BC, $A_1D_1$ và AD song song với $B_1C_1$.

b. Ta có:

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \Rightarrow AB // (A_1B_1CD)$.

$AB // CD \in (CDD_1C_1) \Rightarrow AB // (CDD_1C_1)$.

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, $(A_1B_1CD)$ và $(CDD_1C_1)$ song song với AB.

c. Ta có:

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1)$.

$BC // B_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BC // (A_1B_1C_1D_1)$.

$CD // C_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow CD // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AD // A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD // (A_1B_1C_1D_1)$.

Ngoài ra, ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow AC // A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC // (A_1B_1C_1D_1)$.

. $DD_1 \overset{//}{=} AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \Leftrightarrow BB_1D_1D$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow BD // B_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BD // (A_1B_1C_1D_1)$.

Vậy, tồn tại 6 đường thẳng AB, BC, CD, AD, AC, BD song song với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

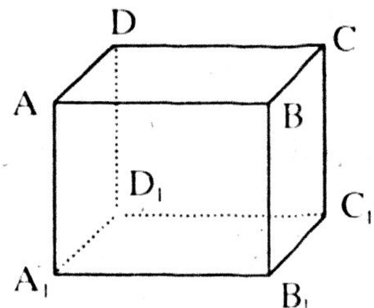
**Thí dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng $(BB_1C_1C)$.

c. Tứ giác $B_1C_1DA$ là hình gì ? Vì sao ?

*Giải*




a. Ta có: $\begin{cases} AA_1 \perp A_1B_1, \text{vì } AA_1B_1B \text{ là hcn} \\ AA_1 \perp A_1D_1, \text{vì } AA_1D_1D \text{ là hcn} \end{cases}$

$\Rightarrow AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$BB_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$, $CC_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$, $DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Vậy, tồn tại 4 đường thẳng $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

b. Ta có: $\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1C_1D_1) \perp (BB_1C_1C)$.

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1BA) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1BA) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1CD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABC_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (ABC_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} CD \perp (BB_1C_1C) \\ CD \in (CDD_1C_1) \end{cases} \Rightarrow (CDD_1C_1) \perp (BB_1C_1C).$$

Vậy, tồn tại 6 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, $(A_1B_1BA)$, $(A_1B_1CD)$, $(ABCD)$, $(ABC_1D_1)$, $(CDD_1C_1)$ vuông góc với mặt phẳng $(BB_1C_1C)$.

c. Vì $ADD_1A_1$ là hình chữ nhật nên:

$AD \overset{//}{=} A_1D_1 \overset{//}{=} B_1C_1 \Rightarrow AD \overset{//}{=} B_1C_1 \Leftrightarrow B_1C_1DA$ là hình bình hành.

Mặt khác, ta có: $B_1C_1 \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow B_1C_1 \perp C_1D \Leftrightarrow \widehat{B_1C_1D} = 90^0$.

Vậy, hình bình hành $B_1C_1DA$ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với *hình hộp chữ nhật* có ba kích thước a, b, c, ta có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2(a + b)c$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2(a + b)c + 2ab = 2(ac + bc + ab)$.
- Thể tích: $V = abc$.

**Thí dụ 3:** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài và chiều cao gấp 3 lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*, từ giả thiết ta có: $a = 6cm$, $b = \frac{1}{2}a = 3cm$, $c = 3b = 9cm$.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là: $S_{xq} = 2(a + b).c = 162cm^2$.

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

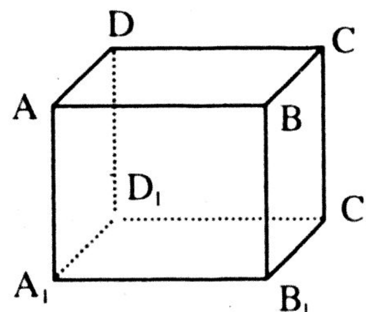
$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 162 + 2.6.3 = 198cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là: $V = a.b.c = 162cm^3$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$, biết $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$. Tìm mối liên hệ giữa các đại lượng a, b, c để tứ giác $AA_1C_1C$ là hình vuông.

*Giải*




Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành.

Ta lại có: $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1$

$\Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^0$.

Khi đó, hình bình hành $AA_1C_1C$ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Để $AA_1C_1C$ là hình vuông điều kiện là:

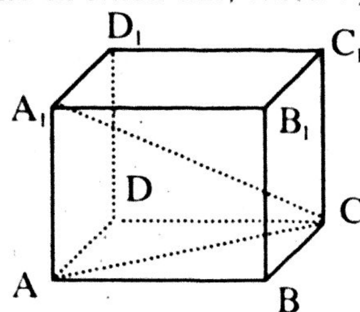
$$AA_1 = AC \Leftrightarrow AA_1^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy, để $AA_1C_1C$ là hình vuông điều kiện là $c^2 = a^2 + b^2$.

**Ví dụ 2:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết $AB = 4cm$, $AC = 5cm$ và $A_1C = 13cm$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và $AA_1$.




Áp dụng định lí Pitago vào $\Delta ABC$, ta được:

$$BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm.$$

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$

$\Leftrightarrow \Delta A_1AC$ vuông tại A.

Áp dụng định lí Pitago vào $\Delta A_1AC$, ta được: $AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12cm$.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 168cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 168 + 2.4.3 = 192cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là: $V = AB.BC.AA_1 = 144cm^3$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình hộp chữ nhật.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp chữ nhật.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Hãy nêu tên các hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của hình hộp.

**Bài tập 2.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng BC.

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng CD.

c. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng $(AA_1B_1B)$.

**Bài tập 3.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng $(BCB_1C_1)$.

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

c. Tứ giác $AA_1C_1C$ là hình gì ? Vì sao ?

**Bài tập 4.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$, biết AB = 6cm, BC = 8cm, $AA_1 = x$.

a. Chứng minh rằng $AA_1C_1C$ là hình chữ nhật.

b. Tính diện tích của tứ giác $AA_1C_1C$.

c. Tìm x để tứ giác $AA_1C_1C$ là hình vuông.

**Bài tập 5.** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài và chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

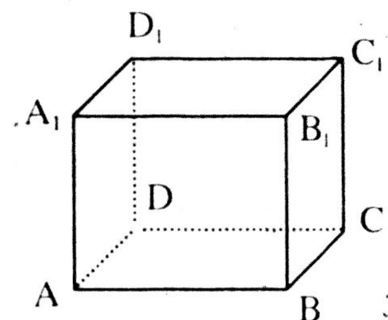
**Bài tập 6.** Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ thoả mãn a : b : c = 4 : 2: 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó, biết thể tích của nó bằng $216cm^3$.

**Bài tập 7.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 6cm, AC = 10cm và $A_1C = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 8.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 3cm, $AA_1$ = 6cm và $S_{AA_1C_1C} = 30cm^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 9.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 8cm, BC = 2cm và $S_{A_1D_1CB} = 16cm^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ




**Bài tập 1.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 2.**

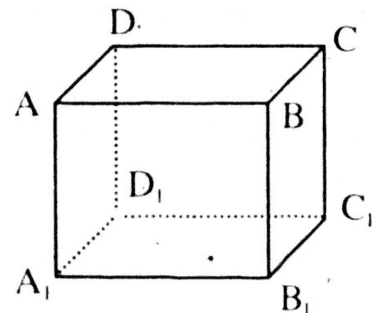
a. BC song song với các đường thẳng:
   AD, $A_1D_1$, $B_1C_1$.

b. CD song song với các mặt phẳng:
   $AA_1B_1B$, $A_1B_1C_1D_1$, $ABC_1D_1$.

c. Mặt phẳng $(AA_1B_1B)$ song song với các đường thẳng: CD, $C_1D_1$.

**Bài tập 3.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 4.**




a. Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành.

Ta lại có: $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1$

$\Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^0$.

Khi đó, hình bình hành $AA_1C_1C$ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

b. Gọi S là diện tích của hình chữ nhật $AA_1C_1C$, ta có: $S = AA_1.AC$.

Trong $\Delta ABC$, ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100 \Leftrightarrow AC = 10cm$.

Khi đó: S = 10x.

c. Để $AA_1C_1C$ là hình vuông điều kiện là: $AA_1 = AC \Leftrightarrow x = 10cm$.

Vậy, để $AA_1C_1C$ là hình vuông điều kiện là x = 10cm.

**Bài tập 5.** Từ giả thiết ta có: a = 6cm, b = 4cm, c = 3cm.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 60cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 60 + 2.6.4 = 108cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là: $V = a.b.c = 72cm^3$.

**Bài tập 6.** Từ giả thiết ta có: $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} \Rightarrow a = 4c, b = 2c.$

Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = a.b.c \Leftrightarrow 216 = 4c.2c.c \Leftrightarrow c^3 = 27 \Leftrightarrow c = 3cm \Rightarrow a = 12, b = 6.$$

Khi đó:

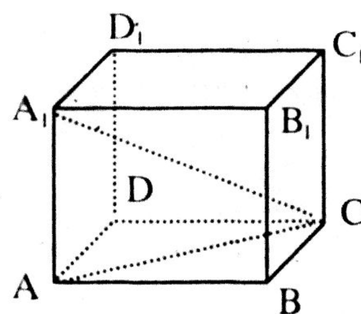
- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 08cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 60 + 2.12.6 = 252cm^2.$$

**Bài tập 7.** Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và $AA_1$.




Áp dụng định lí Pitago vào $\Delta ABC$, ta được:

$$BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm.$$

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$$

$\Leftrightarrow \Delta A_1AC$ vuông tại A.

Áp dụng định lí Pitago vào $\Delta A_1AC$, ta được:

$$AA_1 = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 10^2} = 5cm.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

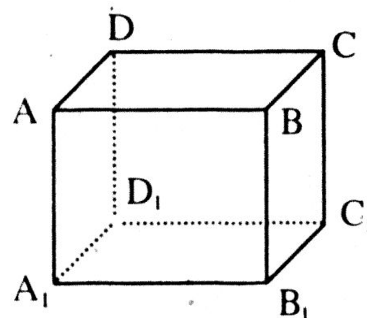
$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 140cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 140 + 2.6.8 = 236cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB.BC.AA_1 = 240cm^3.$$




**Bài tập 8.** Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành.

Ta lại có: $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1$

$\Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^0$.

Khi đó, hình bình hành $AA_1C_1C$ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Gọi S là diện tích của hình chữ nhật $AA_1C_1C$,ta có:

$S = AA_1.AC \Leftrightarrow 30 = 6.AC \Leftrightarrow AC = 5cm$.

Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC, ta được: $BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4cm$.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 84cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 84 + 2.3.4 = 108cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB.BC.AA_1 = 72cm^3.$$

**Bài tập 9.** *Thực hiện tương tự bài tập 8.*




# HÌNH LẬP PHƯƠNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

> ***Định nghĩa*: *Hình lập phương*** *là hình có 6 mặt đều là những hình vuông.*

**Nhân xét**: Như vậy, đi1ho hình lập phương người ta thường phát biểu " *Cho hình lập phương cạnh bằng a* ".

**Thí dụ 1:** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

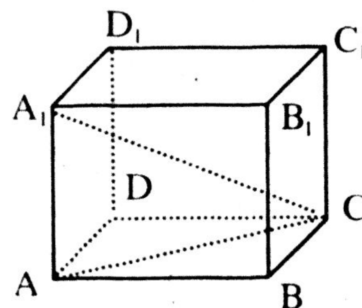
a. Khi nối $A_1$ với C và A với $C_1$ thì hai đường thẳng $A_1C$ và $AC_1$ có cắt nhau hay không ? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không ? Vì sao ?

b. Câu hỏi tương tự như câu a) với $A_1C$ và $B_1D$.

c. Đường thẳng AC song song với những mặt phẳng nào ?

d. Đường thẳng AC vuông góc với những mặt phẳng nào ?

*Giải*




a. Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Rightarrow A_1C$ và $AC_1$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Giả sử $A_1C$, $AC_1$ vuông góc với nhau, khi đó:

$AA_1C_1C$ là hình thoi $\Leftrightarrow AA_1 = A_1C_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}$, mâu thuẫn.

Vậy, $A_1C$ và $AC_1$ không có thể vuông góc với nhau.

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. Ta có: $AC // A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AC // A_1C_1 \in (A_1C_1B) \Rightarrow AC // (A_1C_1B)$.

$AC // A_1C_1 \in (A_1C_1D) \Rightarrow AC // (A_1C_1D)$.

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, $(A_1C_1B)$, $(A_1C_1D)$ song song với AC.

d. Ta có: $\begin{cases} AC \perp BB_1 \text{ vì } BB_1 \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \text{ vì } ABCD \text{ là hình vuông} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD_1B_1)$.

Vậy, có đúng mặt phẳng $(BDD_1B_1)$ vuông góc với AC.

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với *hình lập phương* có cạnh bằng a, ta có:

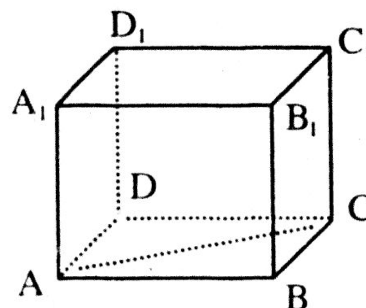
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2$.
- Thể tích: $V = a^3$.

**Thí dụ 2:** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$, biết $AC = 2\sqrt{2}$ cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a.




Trong $\Delta ABC$ vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 8 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 2\text{cm}.$$

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

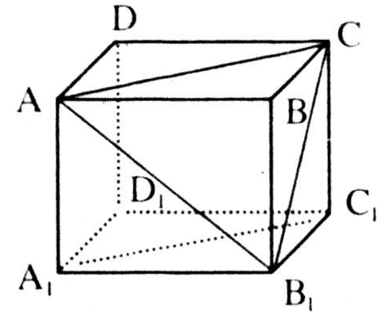
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.2^2 = 16\text{cm}^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.2^2 = 24\text{cm}^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 2^3 = 8\text{cm}^3$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1:** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $(AB_1C) // (A_1C_1D)$.

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi $O_1$ là giao điểm của $A_1C_1$ và $B_1D_1$. Các đường thẳng $AO_1$ và $OC_1$ cắt $A_1C$ theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng $A_1M = MN = NC$.




*Giải*

a. Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC // A_1C_1$. (1)

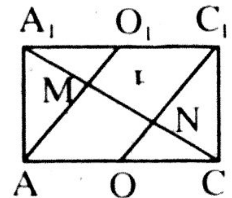
Mặt khác, ta cũng có: $AB \overset{//}{=} CD \overset{//}{=} C_1D_1 \Rightarrow AB \overset{//}{=} C_1D_1$

$\Leftrightarrow ABC_1D_1$ là hình bình hành $\Rightarrow BC_1 // AD_1$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $(AB_1C) // (A_1C_1D)$.

b. Ta có: $OA \overset{//}{=} O_1C_1 \Leftrightarrow AOC_1O_1$ là hình bình hành $\Rightarrow AO_1 // OC_1$.

Trong $\Delta NA_1C_1$, ta có: $\begin{cases} A_1O_1 = C_1O_1 \\ O_1M // C_1N \end{cases} \Rightarrow A_1M = MN.$ (3)




Trong $\Delta MAC$, ta có: $\begin{cases} AO = CO \\ ON // AM \end{cases} \Rightarrow CN = MN.$ (4)

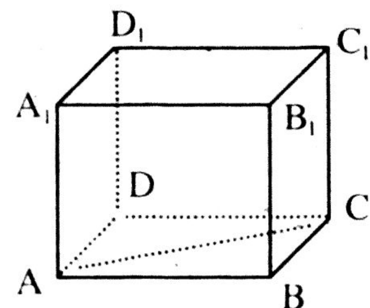
Từ (3), (4) suy ra $A_1M = MN = NC$.

**Ví dụ 2:** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có diện tích mặt chéo $ACC_1A_1$ bằng $9\sqrt{2}\ cm^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.

*Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a.




Trong $\Delta ABC$ vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Diện tích mặt chéo $ACC_1A_1$ được cho bởi:

$$S = AA_1.AC \Leftrightarrow 9\sqrt{2} = a.a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3cm.$$

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình lập phương.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lập phương.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Khi nối $D_1$ với B và $B_1$ với D thì hai đường thẳng $BD_1$ và $B_1D$ có cắt nhau hay không ? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không ? Vì sao ?

b. Câu hỏi tương tự như câu a) với $B_1D$ và $AC_1$.

c. $BD_1$ và $AA_1$ có cắt nhau hay không ? Vì sao ?

d. Đường thẳng BD song song với những mặt phẳng nào ?

e. Đường thẳng BD vuông góc với những mặt phẳng nào ?

**Bài tập 2.** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó, biết:

a. AB = 6cm.

b. $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

c. $OC = \sqrt{2}$ cm, với O là giao điểm của AC và BD.

d. $AC_1 = 3\sqrt{3}$ cm.

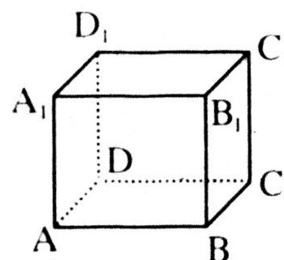
e. $OA_1 = 2\sqrt{3}$ cm, với O là giao điểm của AC và BD.

**Bài tập 3.** Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có diện tích mặt chéo $ACC_1A_1$ bằng $25\sqrt{2}$ $cm^2$. Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.**

a. Khi nối $D_1$ với B và $B_1$ với D thì hai đường thẳng $BD_1$ và $B_1D$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.




Tuy nhiên, $BD_1$ và $B_1D$ không thể vuông góc với nhau được vì nếu vậy thì: $BD_1B_1D$ là hình vuông $\Leftrightarrow BD = DD_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}$, mâu thuẫn

b. *Học sinh tự làm.*

c. $BD_1$ và $AA_1$ không cắt nhau. Vì nếu cắt nhau chúng sẽ đồng phẳng, điều này là mâu thuẫn.

d. Đường thẳng BD song song với các mặt phẳng: $(A_1B_1C_1D_1)$, $(AB_1D_1)$, $(CB_1D_1)$.

e. Đường thẳng BD vuông góc với các mặt phẳng:

$(ABB_1A_1)$, $(BCC_1B_1)$, $(CDD_1C_1)$, $(ADD_1A_1)$ – Bốn mặt bên.

$(ACC_1A_1)$, $(BDD_1B_1)$ – Hai mặt chéo.

**Bài tập 2.**

a. Ta có ngay:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.6^2 = 144cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.6^2 = 216cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 6^3 = 216cm^3$.

b. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong $\Delta ABC$ vuông cân tại B, ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 32 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 4cm$.

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.4^2 = 64cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.4^2 = 96cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 4^3 = 64cm^3$.

c. *Học sinh tự làm* – Biết $OC = \frac{1}{2}AC$.

d. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong $\Delta ACC_1$ vuông tại C, ta có:

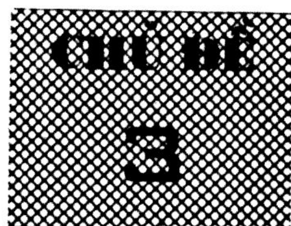
$C_1A^2 = AC^2 + C_1C^2 = AB^2 + BC^2 + C_1C^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 27 = 3a^2 \Leftrightarrow a = 3cm$.

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

e. *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 3.** *Tham khảo ví dụ 2.*



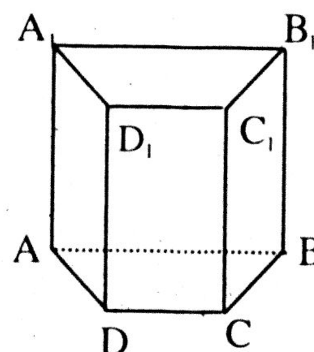

# HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

> ***Định nghĩa*****: Hình lăng trụ đứng** *là hình có các mặt bên đều là những hình chữ nhật.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình lăng trụ đứng* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó:




1. Các điểm A, B, C, D, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ được gọi là các *đỉnh*.
2. Các đoạn $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ song song với nhau và bằng nhau, chúng được gọi là các *cạnh bên*.
3. Các mặt $ABB_1A_1$, $BCC_1B_1$, $CDD_1C_1$, $ADD_1A_1$ là những hình chữ nhật , chúng được gọi là các *mặt bên*.
4. Hai mặt ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ là hai *đáy*.
5. Hình lăng trụ này có đáy là tứ giác nên gọi là *lăng trụ tứ giác*.

**Nhận xét:** Như vậy:

- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

**Thí dụ 1:** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA_1B_1C_1$.

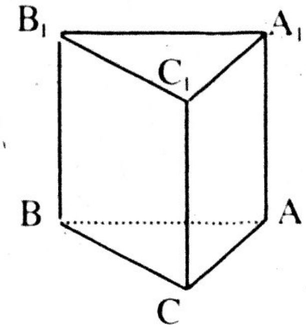
a. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

b. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

c. Sử dụng kí hiệu " // ", " $\perp$ " và " $\in$ " điền vào các ô trong bảng sau:

| | $AA_1$ | $BB_1$ | $CC_1$ | AB | BC | AC | $A_1B_1$ | $B_1C_1$ | $A_1C_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ABC) | | | | | | | | | |
| $(A_1B_1C_1)$ | | | | | | | | | |
| $(ABB_1A_1)$ | | | | | | | | | |

*Giải*




a. Ta chỉ có $(ABC) // (A_1B_1C_1)$.

b. Ta có:

- $(AA_1B_1B)$, $(BB_1C_1C)$, $(AA_1C_1C)$ cùng vuông góc với (ABC).
- $(AA_1B_1B)$, $(BB_1C_1C)$, $(AA_1C_1C)$ cùng vuông góc với $(A_1B_1C_1)$.

c. Ta có:

| | $AA_1$ | $BB_1$ | $CC_1$ | AB | BC | AC | $A_1B_1$ | $B_1C_1$ | $A_1C_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ABC) | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | // | // | // |
| $(A_1B_1C_1)$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | // | // | // | $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $(ABB_1A_1)$ | $\in$ | $\in$ | // | $\in$ | [redacted] | [redacted] | $\in$ | [redacted] | [redacted] |

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

> ***Diện tích xung quanh** của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân chiều cao.*

Như vậy, ta có: $S_{xq} = 2p.h$

trong đó:

- p là nửa chu vi đáy.
- h là chiều cao.

> ***Diện tích toàn phần** của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.*

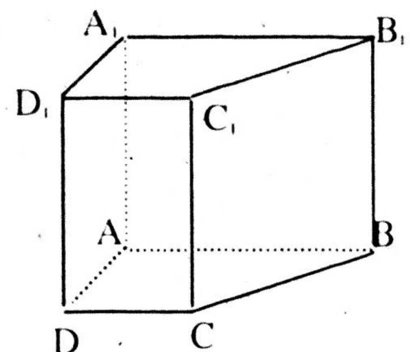
Như vậy, ta có: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$.

> ***Thể tích** của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với với chiều cao.*

Như vậy, ta có: V = S.h.

trong đó:

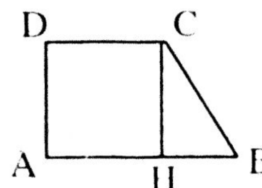
- S là diện tích đáy.
- h là chiều cao.




**Thí dụ 2:** Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$), AB = 6cm, CD = 2cm, AD = 3cm và $AA_1$ = 5cm. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

*Giải*

Xét hình thang ABCD, hạ CH vuông góc với AB, ta có:




$CH = AD = 3cm$,

$BH = AB - AH = AB - CD = 4cm$.

Trong $\Delta HBC$ vuông tại H, ta có:

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm$.

Khi đó, ta lần lượt có:

- Diện tích một đáy: $S_{đáy} = (AB + CD).AD = (6 + 2).3 = 24cm^2$.
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = (AB + BC + CD + DA).AA_1$
  $= (6 + 5 + 2 + 3).5 = 80cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 80 + 2.24 = 128cm^2$.
- Thể tích: $V = S_{đáy}.h = 24.5 = 120cm^3$.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang cân (AB // CD) có AC vuông góc với BD.

a. Đường thẳng BD và $A_1C$ có cắt nhau không ? Vì sao ?

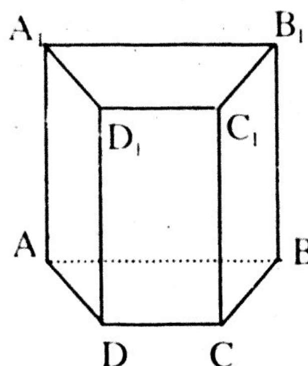
b. Đường thẳng AD song song với những mặt phẳng nào ?

c. Đường thẳng AC vuông góc với những mặt phẳng nào ?

d. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

e. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

*Giải*




a. Đường thẳng BD và $A_1C$ không cắt nhau, bởi nếu chúng cắt nhau thì
4 điểm B, C, D, $A_1$ cùng thuộc một mặt phẳng
$\Rightarrow A_1 \in (BCD) \Leftrightarrow A_1 \in (ABCD)$, mâu thuẫn.

b. Ta có:
$AD // A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD // (A_1B_1C_1D_1)$.
$AD // A_1D_1 \in (A_1D_1B) \Rightarrow AD // (A_1D_1B)$.
$AD // A_1D_1 \in (A_1D_1C) \Rightarrow AD // (A_1D_1C)$.
Vậy, có 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, $(A_1D_1B)$, $(A_1D_1C)$ song song với AD.

c. Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB_1D_1D)$.

Vậy, có duy nhất mặt phẳng $(BB_1D_1D)$ vuông góc với AC.

d. Ta có các cặp mặt phẳng song song với nhau là: $(ABCD) // (A_1B_1C_1D_1)$, $(ABB_1A_1) // (CDD_1C_1)$.

e. Dựa trên tính chất của hình lăng trụ đứng ta có ngay các mặt phẳng vuông góc với hai đáy (ABCD) và $(A_1B_1C_1D_1)$ là: $(AA_1B_1B)$, $(BB_1C_1C)$, $(CC_1D_1D)$, $(AA_1D_1D)$, $(AA_1C_1C)$, $(BDD_1B_1)$.

Mặt khác:

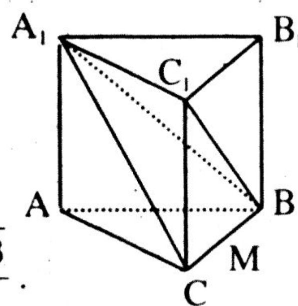
- Vì $AC \perp (BB_1D_1D)$ nên các mặt phẳng chứa AC đều vuông góc với mặt phẳng $(BB_1D_1D)$, do đó ta có: $(ACC_1A_1) \perp (BB_1D_1D)$, $(ACB_1) \perp (BB_1D_1D)$, $(ACD_1) \perp (BB_1D_1D)$.
- Vì $BD \perp (ACC_1A_1)$ nên các mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mặt phẳng $(ACC_1A_1)$, do đó ta có: $(BDD_1B_1) \perp (ACC_1A_1)$, $(BDA_1) \perp (ACC_1A_1)$, $(BDC_1) \perp (ACC_1A_1)$.
- Vì $A_1C_1 \perp (BB_1D_1D)$ nên các mặt phẳng chứa $A_1C_1$ đều vuông góc với mặt phẳng $(BB_1D_1D)$, do đó ta có thêm:
  $(A_1C_1B) \perp (BB_1D_1D)$, $(A_1C_1D) \perp (BB_1D_1D)$.
- Vì $B_1D_1 \perp (ACC_1A_1)$ nên các mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mặt phẳng $(ACC_1A_1)$, do đó ta có thêm:
  $(B_1D_1A) \perp (ACC_1A_1)$, $(B_1D_1C) \perp (ACC_1A_1)$.

**<u>Ví dụ 2:</u>** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh bằng a.

a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

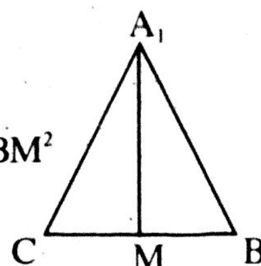
b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác $\Delta ABC$ và $\Delta A_1BC$.

*Giải*




a. Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = (AB + BC + CA).AA_1$
  $= (a + a + a).a = 3a^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$
  $= 3a^2 + 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Thể tích: $V = S_{đáy}.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.




b. Gọi M là trung điểm của BC.

- Trong $\Delta A_1BC$, ta có: $A_1M^2 = A_1C^2 - BM^2 = A_1A^2 + AC^2 - BM^2$
  $= a^2 + a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4} \Leftrightarrow A_1M = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ta có: $S_{\Delta A_1BC} = \dfrac{1}{2}A_1M.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Khi đó: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình lăng trụ đứng.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$).

a. Hai mặt phẳng $(AA_1D_1D)$ và $(BB_1C_1C)$ có cắt nhau không ? Vì sao ?

b. Đường thẳng AD song song với những mặt phẳng nào ?

c. Đường thẳng AD vuông góc với những mặt phẳng nào ?

d. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

e. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

**Bài tập 2.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA_1B_1C_1$, có ABC là tam giác vuông tại B.

a. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

b. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

c. Sử dụng kí hiệu " // " và " ⊥ " điền vào các ô trong bảng sau:

| | $AA_1$ | $BB_1$ | $CC_1$ | AB | BC | AC | $A_1B_1$ | $B_1C_1$ | $A_1C_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ABC) | | | | | | | | | |
| $(A_1B_1C_1)$ | | | | | | | | | |
| $(ABB_1A_1)$ | | | | | | | | | |

**Bài tập 3.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$), AB = 12cm, BC = 10cm, CD = 4cm và $AA_1$ = 6cm. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

**Bài tập 4.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang cân (AB // CD), BC = 4cm, CD = 6cm, $\widehat{BAD} = 60^0$ và $AA_1$ = 4cm. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

**Bài tập 5.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh bằng 3cm.

a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

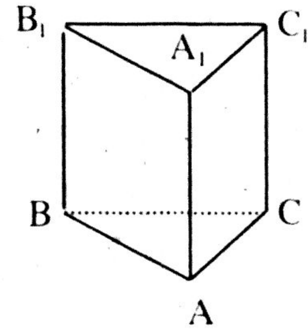
b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1BC$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.** *Tham khảo ví dụ 1.*

**Bài tập 2.**

a. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$.




b. Ta có:

- $(ABC)$ vuông góc với các mặt phẳng: $(AA_1B_1B)$, $(BB_1C_1C)$, $(AA_1C_1C)$.
- $(A_1B_1C_1)$ vuông góc với các mặt phẳng: $(AA_1B_1B)$, $(BB_1C_1C)$, $(AA_1C_1C)$.
- $(AA_1B_1B) \perp (BB_1C_1C)$

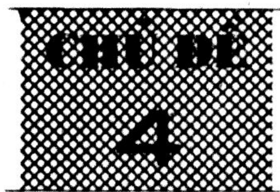
c. Ta có:

| | $AA_1$ | $BB_1$ | $CC_1$ | AB | BC | AC | $A_1B_1$ | $B_1C_1$ | $A_1C_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ABC) | ⊥ | ⊥ | ⊥ | | | | // | // | // |
| $(A_1B_1C_1)$ | ⊥ | ⊥ | ⊥ | // | // | // | | | |
| $(ABB_1A_1)$ | | | // | | ⊥ | | | ⊥ | |

**Bài tập 3.** *Tham khảo thí dụ 2.*

**Bài tập 4.** *Học sinh tự làm.*

**Bài tập 5.** *Tham khảo ví dụ 2.*



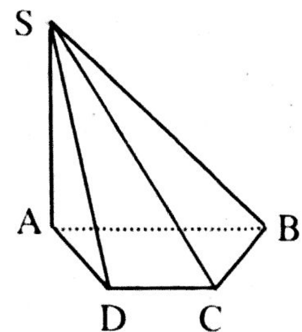

# HÌNH CHÓP ĐỀU

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. HÌNH CHÓP ĐIỀU

> ***Định nghĩa**: **Hình chóp** là hình có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung đỉnh.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp* S.ABCD, và ở đó:

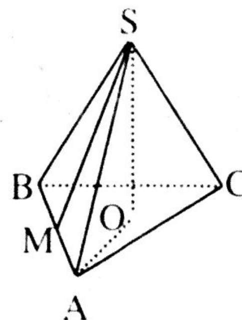



1. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn SA, SB, SC, SD được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác SAB, SBC, SCD, SAD được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4. Mặt ABCD là *đáy* của hình chóp.

5. Hình chóp này có đáy là tứ giác nên gọi là *hình chóp tứ giác*.

> ***Định nghĩa*: Hình chóp đều** *là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp tam giác đều* S.ABC, và ở đó:



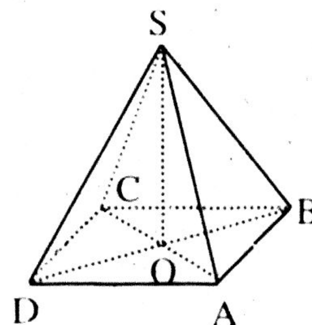

1. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn SA, SB, SC bằng nhau được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác SAB, SBC, SAC là các tam giác cân đỉnh S, chúng được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4. ABC là một tam giác đều và nó được gọi là *đáy* của hình chóp.
5. Đoạn SM (với M là trung điểm của AB) được gọi là *trung đoạn*.
6. Đoạn SO (với O là tâm của đáy ABC) được gọi là *đường cao*.
6. Hình chóp này có đáy là tam giác nên gọi là *hình chóp tam giác đều*.

**Thí dụ 1:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD.

a. Chứng minh rằng SO ⊥ (ABCD).

b. Chứng minh rằng (SAC) ⊥ (SBD).

*Giải*




a. Ta lần lượt có:

- Trong ΔSAC, ta có: SA = SC ⇔ ΔSAC cân tại S
  ⇒ SO ⊥ AC. (1)
- Trong ΔSBD, ta có: SB = SD ⇔ ΔSBD cân tại S
  ⇒ SO ⊥ BD. (2)

Từ (1), (2) suy ra SO ⊥ (ABCD).

b. Từ kết quả câu a), ta có: SO ⊥ AC. (3)

Mặt khác, vì ABCD là hình vuông nên: BD ⊥ AC. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: (SBD) ⊥ AC ∈ (SAC) ⇒ (SAC) ⊥ (SBD).

## 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

> ***Diện tích xung quanh*** *của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi với trung đoạn.*

Như vậy, ta có: $S_{xq} = p.d$

trong đó:

- p là nửa chu vi đáy.
- d trung đoạn.

> ***Diện tích toàn phần*** *của hình chóp đều bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.*

Như vậy, ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$.

> ***Thể tích*** *của hình chóp đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy nhân với với chiều cao.*

Như vậy, ta có: $V = \frac{1}{3}S.h$.

trong đó:
- S là diện tích đáy.
- h là chiều cao.

**Thí dụ 2:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các mặt bên là những tam giác đều, AB = 4cm và O là trọng tâm. Gọi M là trung điểm BC.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng SO, SM.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

*Giải*

a. Nhận xét rằng: $SA = SB \Leftrightarrow \Delta SAB$ cân tại S $\Rightarrow SM \perp AB$.

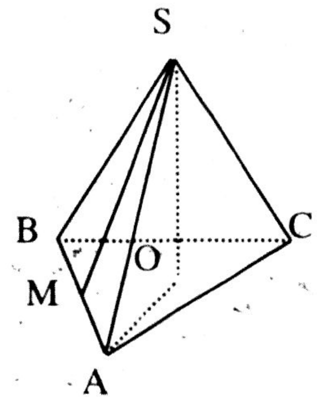
Trong $\Delta SMA$ vuông tại M, ta có:

$SM^2 = SA^2 - AM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Leftrightarrow SM = 2\sqrt{3}$ cm.

Trong $\Delta SOA$ vuông tại O, ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{32}{3}$$

$$\Leftrightarrow SO = \frac{4\sqrt{6}}{3}\text{cm}.$$




b. Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(AB + BC + CA).SM = \frac{1}{2}(4 + 4 + 4).2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

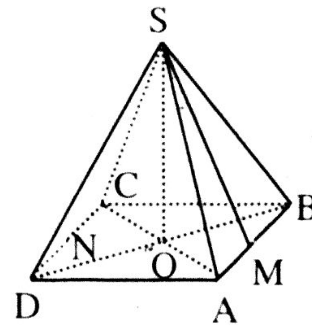
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm².

- Thể tích: $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \frac{1}{3}.4\sqrt{3}.\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³.

## II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h và cạnh đáy bằng a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tìm mối liên hệ giữa a và h để $\Delta SMN$ là tam giác đều.

*Giải*




Trong $\Delta SMN$, ta có: $MN = BC = a$

do đó, để $\Delta SMN$ là tam giác đều điều kiện là:

$$SO = \frac{MN\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì $\Delta SMN$ là tam giác đều.

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao 15cm và thể tích là $1280cm^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy. b. Tính diện tích xung quanh.

*Giải*

a. Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều SABCD

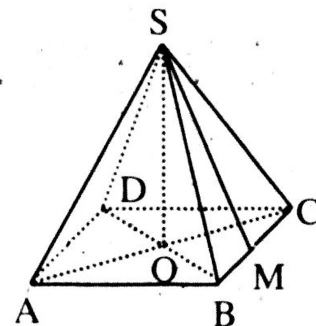
Từ giả thiết, ta có: $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}a^2.15 = 5a^2 = 1280$

$\Leftrightarrow a = 16cm$. Vậy, độ dài cạnh đáy $a = 16cm$.

b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$S_{xq} = p.d = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).SM = 32SM.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $OM = \frac{1}{2}AB = 8cm$.




Trong tam giác vuông SOM ta có:

$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Leftrightarrow SM = 17cm$.

Khi đó, ta được: $S_{xq} = 32.17 = 544cm^2$.

Vậy, diện tích xung quanh hình chóp bằng $544cm^2$.

## III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình chóp đều.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình chóp đều.

## IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 2.** Cho hình chóp tam giác đều SABC có các mặt bên là các tam giác đều. Gọi O là trọng tâm $\Delta ABC$, biết $OA = \sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 3.** Cho hình chóp tam giác đều SABC có chiều cao bằng a và thể tích bằng $3a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 4.** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 5.** Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao bằng a và thể tích bằng $3a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 6.** Cho hình chóp lục giác đều SABCDEF có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

**Bài tập 7.** Cho hình chóp lục giác đều SABCDEF có chiều cao bằng a và thể tích bằng $18a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

**Bài tập 8.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có AB = BC = 5cm, $AA_1$ = 6cm. Gọi O là giao điểm của $A_1C_1$ và $B_1D_1$.

a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp OABCD.

**Bài tập 9.** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, gọi O là trọng tâm của $\Delta ABC$.

a. Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$. b. Chứng minh rằng $(SAO) \perp (SBC)$.

## V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

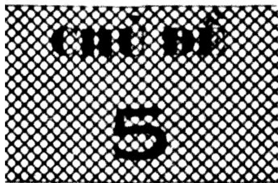
**Bài tập 1.** *Tham khảo thí dụ 2.*

**Bài tập 2.** *Tham khảo thí dụ 2.*

**Bài tập 3.** *Tham khảo thí dụ 2.*

**Bài tập 4.** *Tham khảo ví dụ 1.*

**Bài tập 5.** *Tham khảo ví dụ 1.*



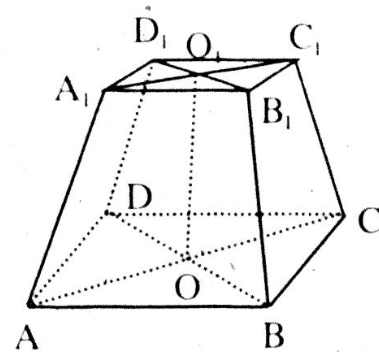

# HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

## I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Cắt một hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp cụt đều* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó mỗi mặt bên của nó đều là những hình thang cân bằng nhau.




### 2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với *hình chóp cụt đều*, ta có:

a. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d$

trong đó:

- p và p' lần lượt là chu hai đáy
- d là đường cao của mặt bên.

b. Thể tích: $V_{chóp\ cụt} = \frac{1}{3}h.(B + B' + \sqrt{BB'})$

trong đó: – B, B' là diện tích các đáy

– h là độ dài đường cao.

## II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Phát biểu định nghĩa hình chóp cụt đều.

**Câu hỏi 2:** Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình chóp cụt đều.

## III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài tập 1.** Cho hình chóp tam giác đều SABC có các cạnh bằng a. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a. Chứng tỏ rằng hình $ABCA_1B_1C_1$ là hình chóp cụt đều.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt đều $ABCA_1B_1C_1$.

c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cụt đều $ABCA_1B_1C_1$ và hình chóp SABC.

**Bài tập 2.** Cho hình chóp tam giác đều SABCD có các cạnh bằng a. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD.

a. Chứng tỏ rằng hình $ABCDA_1B_1C_1D_1$ là hình chóp cụt đều.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cụt đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ và hình chóp SABCD.

## ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài tập 1.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Hãy chỉ ra:

a. Hai đường thẳng cắt nhau.

b. Hai đường thẳng song song.

c. Hai đường thẳng không cắt nhau va không cùng nằm trên một mặt phẳng.

d. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng.

e. Đường thẳng không có điểm chung với mặt phẳng.

f. Đường thẳng cắt mặt phẳng.

g. Hai mặt phẳng cắt nhau.

h. Hai mặt phẳng không cắt nhau.

i. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

**Bài tập 2.** Một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông, chiều cao của lăng trụ là 7cm. Độ dài hai cạnh góc vuông của đáy là 3cm và 4cm. Hãy tính:

a. Diện tích một mặt đáy.

b. Diện tích mặt xung quanh.

c. Diện tích toàn phần.

d. Thể tích lăng trụ.

**Bài tập 3.** Thể tích của một hình chóp đều là $126cm^3$, chiều cao của hình chóp là 6cm. Tính diện tích đáy của nó.

**Bài tập 4.** Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh đáy là a và 2a, chiều cao của mặt bên là a.

a. Tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt.

b. Tính độ dài cạnh bên và chiều cao hình chóp cụt.

**Bài tập 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = 4cm, AC = 5cm và $A_1C$ = 13cm. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

**Bài tập 6.** Một bể nước hình hộp chữ nhật, dài 3,9m. Lúc đầu bể không chứa nước. Người ta lắp một vòi nước chảy vào bể, mỗi phút chảy được 48 lít. Sau 65 phút mực nước trong bể cao 0,4m.

a. Tính chiều rộng của bể.

b. Người ta cho một vòi vào chảy tiếp 07,5 phút nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu ?

**Bài tập 7.** Cho hình lập phương DEGH.MNPQ. Gọi O và $O_1$ lần lượt là giao điểm của các đường chéo DG và EF, MP và NQ. Biết cạnh hình lập phương bằng 8cm.

a. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương.

b. Tính thể tích của hình chóp $O_1$.DEGF.

c. Tính thể tích của hình chóp N.DEG.

**Bài tập 8.** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy AB = 8cm, cạnh bên SA = 12cm.

a. Tính chiều cao SO rồi tính thể tích của hình chóp.

b. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 99 14899

*Chịu trách nhiệm xuất bản*

*Giám đốc :* **PHÙNG QUỐC BẢO**
*Tổng biên tập :* **NGUYỄN BÁ THÀNH**

*Biên tập*
**Hải Đăng**

*Chế bản*
**NS. Bình Thạnh**

*Trình bày bìa*
**Xuân Duyên**

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
*Địa chỉ :*
2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP.HCM
ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

**ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 8 TẬP 2**
Mã số : 1L – 250 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/06 – 114/ĐHQGHN ngày 21/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 576 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.